Т. Б. АЙЗЕНБЕРГ
И. М. ВОРОНКОВ
В. М. ОСЕЦКИЙ

Руководство к решению задач по теоретической механике



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Учебно-методическое управление по вузам

Т. Б. АЙЗЕНБЕРГ, И. М. ВОРОНКОВ и В. М. ОСЕЦКИЙ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Под редакцией проф. И. М. Воронкова

Издание третье

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Москва — 1960

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее методическое пособие должно облегчить студенту-заочнику изучение теории и дать ему навыки в решении задач по теоретической механике. Объем и расположение материала в пособии соответствуют примерно «Курсу теоретической механики» проф. И. М. Воронкова и «Сборнику задач по теоретической механике» проф. И. В. Мещерского.

Большое внимание в этом пособии уделено подбору и систематизации задач, которые классифицируются, во-первых, по расположению линий действия заданных сил и, во-вторых, по характеру связей.

Разделы первый и второй пособия составлены проф. И. М. Воронковым и доц. Т. Б. Айзенберг, раздел третий — проф. И. М. Воронковым, доц. Т. Б. Айзенберг и доц. В. М. Осецким.

Литература

1. Н. Н. Бухгольц, И. М. Вороиков, А. П. Минаков. Сборник задач по теоретической мехаиике. М., Гостехтеоретиздат, 1949.

2. В. М. Осецкий. Сбориик задач по теоретической мехаиике для горных втузов, под ред. проф. И. М. Воронкова. М., 1938.

3. И. В. Мещерский. Сборник задач по теоретической мехаиике. М., Гостехтеоретиздат, 1950 и последующие издаиия.

4. И. М. Воронков. Курс теоретической механики. М., Гостехтеоретиздат, 1944 и последующие издаиия.

5. Е. И. Николаи. Теоретическая механика, ч. 1 и 2. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957.

6. Л. Г. Лойцянский и А. И. Курье. Курс теоретической мехаиики, ч. 1 и 2. М., Государственное издательство техинко-теоретической литературы, 1954, 1957.

7. Б. С. Зернов. Сборник задач по теоретической мехаиике, ч. 1.

8. Ф. Виттенбауер. Задачник по механике. М., Государствеиное техническое издательство, 1926.

9. В. М. Осецкий. Механика в горном деле. Углетехиздат, 1957.

РАЗДЕЛ I

СТАТИКА

ГЛАВА I

СХОДЯЩИЕСЯ СИЛЫ

§ 1. Сложение сил, действующих по одной прямой

(И. В. Мещерский, задачи 3, 4, 6*)

При сложении сил, действующих по одной прямой, необходимо различать два следующих случая.

1. Все силы направлены в одну и ту же сторону. Равнодействующая такой системы сил равна их *арифметической* сумме и направлена по той же прямой и в ту же сторону, что и составляющие силы.

2. Силы действуют по одной прямой, но не все направлены в одну сторону.

Равнодействующая такой системы сил равна их *алгебраической* сумме, причем силы, направленные по данной прямой в одну сторону, будем считать положительными, а силы, направленные в противоположную сторону,— отрицательными.

Если силы, действующие по одной прямой, находятся в равновесии, то их равнодействующая равна нулю.

Пример 1

На дне шахты находится человек весом в 64 *кГ*; он поднимает груз весом 48 *кг* посредством каната, перекинутого через блок. Какое давление производит человек на дно шахты (рис. 1)?

* Здесь и дальше в тексте указаны номера задач из «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского, изд. 1950 г. и последующих изданий.

Решение

Если пренебречь собственным весом каната, то натяжение каната во всех его точках одинаково и равно весу поднимаемого груза, так как неподвижный блок не изменяет величины силы, а изменяет только ее направление. Следовательно, сила натяжения каната T, приложенная к руке человека, равна весу P поднимаемого груза и направлена по вертикали вверх. Поэтому к человеку, находящемуся на дне шахты, приложены две силы, действующие по одной прямой и направленные в противоположные стороны: вес человека $\overline{G}$ и сила натяжения каната $\overline{T}$. Равнодействующая $\overline{R}$ этих сил, $\overline{G}$ и $\overline{T}$, равна их разности и направлена по той же прямой в сторону большей силы, т. е.

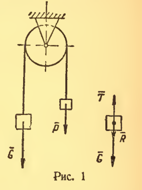


Рис. 1

$$R = G - T = 64 - 48 = 16 \ кГ.$$

Так как $G > P$, то равнодействующая $\overline{R}$ направлена по вертикали вниз.

Отсюда следует, что давление человека на дно шахты равно 16 *кГ*.

§ 2. Сложение двух сил, сходящихся в одной точке

Равнодействующая $\overline{R}$ двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, приложенных в одной точке и направленных под углом α друг к другу, равна геометрической сумме этих сил и изображается диагональю параллелограмма, построенного на силах $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (рис. 2), т. е.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2. \qquad (1)$$

Рис. 2

Величина равнодействующей определяется по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha}, \qquad (2)$$

а направление ее определяется углами β и γ между силами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ и равнодействующей $\overline{R}$, которые можно найти по теореме синусов:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin(180 - \alpha)},$$

или

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Если силы F_1 и F_2 и угол α между ними заданы, то сначала по формуле (2) находим величину равнодействующей, а затем, подставив ее значение в равенства (3), найдем $\sin\beta$ и $\sin\gamma$, а следовательно, и углы β и γ.

При графическом нахождении равнодействующей двух сходящихся сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ не следует строить весь параллелограмм; достаточно из конца силы $\bar{F}_1$ провести вектор, параллельный и равный второй силе $\bar{F}_2$. Вектор, соединяющий начальную и конечную точки полученной ломаной линии, изображает по величине и направлению искомую равнодействующую $\bar{R}$ двух данных сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$.

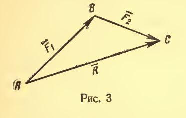


Рис. 3

Вектор $\overline{AC}=\bar{R}$ называется замыкающей стороной силового треугольника ABC (рис. 3).

Если две слагаемые силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ равны по модулю, то параллелограмм, построенный на этих силах, является ромбом, а равнодействующая — диагональю этого ромба. Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке их пересечения делятся пополам, то равнодействующая, изображаемая вектором $\overline{AC}$, делит вторую диагональ BD пополам, перпендикулярна к ней и, кроме того, сама делится пополам в точке O. Следовательно, для того,

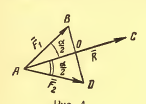


Рис. 4

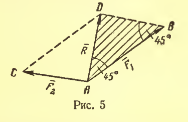


Рис. 5

чтобы найти равнодействующую двух равных по величине сходящихся сил, достаточно построить вектор $\overline{AO}$, соединяющий точку приложения слагаемых сил с серединой отрезка, соединяющего концы этих сил, и затем этот вектор удвоить, т. е.

$$\bar{R}=2\overline{AO}, \tag{4}$$

величина силы R равна:

$$R=2F\cos\frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

где α — угол между силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ (рис. 4). Это свойство дальше будет использоваться при нахождении равнодействующей двух равных пересекающихся сил.

Пример 2

Как относятся величины сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, если угол между ними равен 135°, а равнодействующая равна по величине меньшей силе (рис. 5)?

Решение

Пусть векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ изображают искомые силы и $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, причем $F_2 < F_1$ и $\angle CAB = 135°$. Тогда диагональ AD параллелограмма $ABDC$, построенного на этих силах, есть равнодействующая сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, т. е.

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{AD}.$$

По условию задачи $R = F_2$ или $AD = DB$; следовательно, треугольник ABD — равнобедренный.

Отсюда следует, что $\angle BAD = \angle ABD$. Но

$$\angle BAC + \angle ABD = 180°,$$

откуда

$$\angle ABD = 180° - \angle BAC = 180° - 135° = 45°$$

и, следовательно,

$$\angle BAD = 45° \text{ и } \angle ADB = 90°,$$

т. е. треугольник ABD — прямоугольный, а потому

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{BD}{AB} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Эту же задачу можно решить, пользуясь формулой (2). Действительно:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 135°};$$

но $R = F_2$, а потому

$$F_2^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 45°,$$

откуда

$$F_1 = 2F_2\cos 45° = F_2\sqrt{2},$$

т. е.

$$\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}.$$

Пример 3

Веревка $DABC$, перекинутая через блок, закреплена одним концом C неподвижно; ко второму концу D этой веревки подвешен груз M весом Q *кГ*. Найти давление, передаваемое на ось

блока, и угол, который сила давления образует с горизонталью. Угол α между веревкой BC и горизонталью задан (рис. 6).

Решение

В точке A к блоку приложена сила $\overline{T}_1$ натяжения веревки AD, а в точке B — сила $\overline{T}_2$ натяжения веревки BC, причем эти две силы по величине равны, так как натяжение веревки $DABC$ во всех ее точках одинаково.

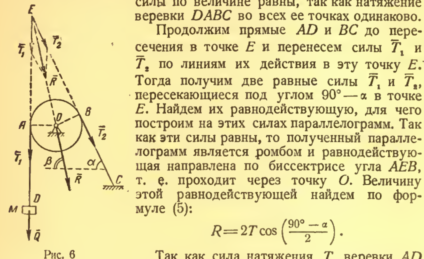


Рис. 6

Продолжим прямые AD и BC до пересечения в точке E и перенесем силы $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ по линиям их действия в эту точку E. Тогда получим две равные силы $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, пересекающиеся под углом $90° - \alpha$ в точке E. Найдем их равнодействующую, для чего построим на этих силах параллелограмм. Так как эти силы равны, то полученный параллелограмм является ромбом и равнодействующая направлена по биссектрисе угла AEB, т. е. проходит через точку O. Величину этой равнодействующей найдем по формуле (5):

$$R = 2T\cos\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right).$$

Так как сила натяжения T_1 веревки AD равна весу груза M, то $T_1 = Q$, а потому

$$R = 2Q\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Сила $\overline{R}$ и есть искомое давление, передаваемое на ось вращения блока. Теперь находим угол β между силой $\overline{R}$ и горизонталью:

$$\beta = 90° - \frac{90° - \alpha}{2} = \frac{90° + \alpha}{2} = 45° + \frac{\alpha}{2}.$$

§ 3. Сложение нескольких сил, сходящихся в одной точке и лежащих в одной плоскости

1. Равнодействующую нескольких сил, сходящихся в одной точке, можно определить способом последовательного сложения. Равнодействующая такой системы сил равна *геометрической* сумме этих сил, т. е.

$$\overline{R} = \Sigma\overline{F}_i, \tag{6}$$

и выражается по величине и направлению вектором, замыкающим ломаную линию, стороны которой параллельны и равны данным

силам. На рис. 7 показано сложение четырех сил. Многоугольник $ABCDE$ называется силовым многоугольником.

Таким образом, применяя правило силового многоугольника, равнодействующую силу можно найти при помощи геометрического построения (графически).

2. Равнодействующую системы сходящихся сил можно определить и аналитическим способом (способом проекций). При этом пользуются теоремой о проекции равнодействующей силы на данную ось, согласно которой проекция равнодействующей на данную ось равна *алгебраической* сумме проекций слагаемых сил на ту же ось.

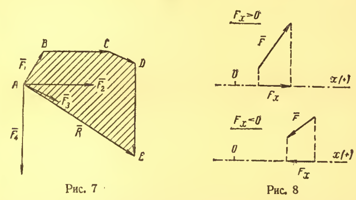


Рис. 7 Рис. 8

Применяя эту теорему для случая плоской системы сходящихся сил, находим проекции равнодействующей этих сил на две координатные оси x и y:

$$R_x = \Sigma X_i, \quad R_y = \Sigma Y_i. \tag{7}$$

По этим проекциям найдем величину и направление равнодействующей по следующим формулам:

$$R = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2},$$
$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{\Sigma X_i}{R}; \quad \cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{\Sigma Y_i}{R}. \tag{8}$$

Таким образом, при решении задачи о сложении сходящихся сил, лежащих в одной плоскости, аналитическим способом сначала нужно выбрать систему координатных осей x и y, найти углы каждой силы с координатными осями и вычислить проекции каждой силы на эти оси.

При вычислении проекции данной силы на ось необходимо иметь в виду, что абсолютное значение этой проекции равно произведению модуля силы на косинус острого угла между силой и осью проекций. При этом, если направление этой проекции совпадает с положительным направлением оси, то проекция положительна; в противном случае, проекция отрицательна (рис. 8).

Иногда бывает удобнее знак проекции определять иначе, а именно:

если направление силы составляет *острый* угол с *положительным* направлением данной оси, то проекция силы на эту ось *положительна*. Если же направление силы составляет *острый угол с отрицательным* направлением данной оси, то проекция силы на эту ось *отрицательна*.

Если сила параллельна оси, то проекция силы на эту ось равна модулю силы, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того, какой угол (0 или 180°) составляет сила с положительным направлением оси.

Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю.

Пример 4

В центре правильного шестиугольника приложены шесть сил, направленных к его вершинам. Определить равнодействующую этих сил, если

$$F_1 = F_3 = 8\ кГ, \quad F_2 = F_4 = 15\ кГ, \quad F_5 = F_6 = 36\ кГ$$

(рис. 9).

Решение

Эту задачу решим аналитическим способом. Выберем начало координат в центре шестиугольника; ось Oy направим по линии действия силы $\bar{F}_2$, а ось Ox — перпендикулярно к ней.

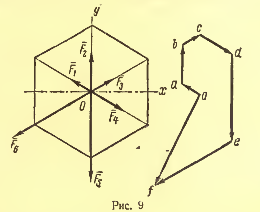


Рис. 9

Найдем проекции каждой силы на эти координатные оси.

Сила $\bar{F}_1$ составляет с положительным направлением оси Oy угол, равный 60°, а с отрицательным направлением оси Ox — угол в 30°.

Следовательно,

$$F_{1y} = F_1 \cos 60°, \quad F_{1x} = -F_1 \cdot \cos 30°.$$

Так как силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_5$ направлены по оси Oy в противоположные стороны, то

$$F_{2y} = F_2, \qquad F_{2x} = 0,$$
$$F_{5y} = -F_5, \qquad F_{5x} = 0.$$

Сила $\overline{F}_3$ составляет острый угол в 30° с положительным направлением оси Ox и острый угол в 60° с *положительным направлением оси* Oy. Следовательно,

$$F_{3x} = F_3 \cos 30° \quad \text{и} \quad F_{3y} = F_3 \cos 60°.$$

Аналогично найдем проекции остальных двух сил на координатные оси:

$$F_{4x} = F_4 \cdot \cos 30°, \qquad F_{4y} = -F_4 \cdot \cos 60°,$$
$$F_{6x} = -F_6 \cdot \cos 30°, \qquad F_{6y} = -F_6 \cdot \cos 60°.$$

После того, как проекции всех данных сил на координатные оси найдены, вычислим проекции их равнодействующей на те же оси:

$$R_x = \Sigma F_x = -8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8\frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -10{,}5\sqrt{3} \approx -18{,}2 \; \kappa\Gamma,$$

$$R_y = \Sigma F_y = 8 \cdot \frac{1}{2} + 15 + 8 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 36 - 36 \cdot \frac{1}{2} = -38{,}5 \; \kappa\Gamma.$$

Теперь находим величину и направление равнодействующей по формулам (8):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-38{,}5)^2 + 3 \cdot (10{,}5)^2} \approx 42{,}6 \; \kappa\Gamma,$$

$$\cos(\overline{R}, \overline{i}) = \frac{R_x}{R} = -\frac{18{,}2}{42{,}6} \approx -0{,}422,$$

$$\cos(\overline{R}, \overline{j}) = \frac{R_y}{R} = -\frac{38{,}5}{42{,}6} \approx -0{,}905,$$

$$(\overline{R}, \overline{i}) \approx 155°, \quad (\overline{R}, \overline{j}) \approx 115°.$$

Графическое решение этой задачи показано на рис. 9.

§ 4. Сложение сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости

Равнодействующая пространственной системы сходящихся сил так же, как и в случае, когда сходящиеся силы лежат в одной плоскости, равна геометрической сумме слагаемых сил, т. е. выражается по величине и направлению замыкающей стороной силового многоугольника, стороны которого равны и параллельны

данным силам. Следовательно, $\overline{R}=\Sigma\overline{F}_i$. В частном случае, когда число слагаемых сил, не лежащих в одной плоскости, равно трем, их равнодействующая выражается по величине и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах. Силовой многоугольник, построенный для пространственной системы сходящихся сил, не является плоской фигурой. Поэтому при сложении сил, не лежащих в одной плоскости, предпочтительнее аналитический способ.

Чтобы найти аналитически величину и направление равнодействующей пространственной системы сходящихся сил, применяя теорему о проекции равнодействующей на данную ось, сначала находят проекции равнодействующей на три координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz*:

$$R_x=\Sigma X_i, \quad R_y=\Sigma Y_i, \quad R_z=\Sigma Z_i. \qquad (9)$$

Определив проекции равнодействующей на координатные оси, находят затем ее величину и направление по формулам:

$$R=\sqrt{(\Sigma X_i)^2+(\Sigma Y_i)^2+(\Sigma Z_i)^2},$$
$$\cos(\overline{R},\overline{i})=\frac{\Sigma X_i}{R}, \quad \cos(\overline{R},\overline{j})=\frac{\Sigma Y_i}{R}, \quad \cos(\overline{R},\overline{k})=\frac{\Sigma Z_i}{R}. \qquad (10)$$

При вычислении проекции данной силы на три взаимно перпендикулярные координатные оси чаще всего встречаются следующих два случая.

1. Углы между силой и координатными осями заданы или их легко определить, исходя из условия задачи, например из соответствующего треугольника. В этом случае величина и знак проекции определяются так же, как и в случае плоской системы сходящихся сил (см. предыдущий параграф).

2. Данная сила и координатная ось, на которую нужно проектировать эту силу, не лежат в одной плоскости и угол между ними не задан. В этом случае часто бывает целесообразно сначала спроектировать данную силу на координатную плоскость, в которой лежит ось проекций, а затем полученную проекцию на эту плоскость спроектировать на данную координатную ось.

При этом необходимо сначала найти угол между данной силой и координатной плоскостью, на которую проектируют эту силу, а затем определить угол между проекцией силы на эту плоскость и данной координатной осью.

Пример 5

Найти равнодействующую трех сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, приложенных к вершине *O* прямоугольного параллелепипеда и направленных, как указано на рис. 10, если $F_1=F_2=20$ *кГ*, $F_3=30$ *кГ*, $a=50$, $b=25$, $c=100$ *см* и $AC=CB$ (рис. 10*а*).

Решение

Для определения модуля и направления искомой равнодействующей $\bar{R}$ найдем ее проекции на три координатные оси Ox, Oy и Oz, направленные по сторонам прямоугольного параллелепипеда, как указано на рис. 10а.

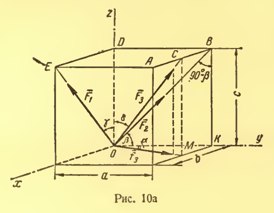


Рис. 10а

Сила $\bar{F}_1$ лежит в плоскости zOx, а потому $F_{1y}=0$. Обозначим угол между силой $\bar{F}_1$ и осью Oz через γ. Тогда $F_{1z}=F_1\cos\gamma$, $F_{1x}=F_1\cdot\sin\gamma$. Сила $\bar{F}_2$ лежит в плоскости zOy, а потому $F_{2x}=0$. Если обозначим угол между силой $\bar{F}_2$ и осью y через β, то $F_{2y}=F_2\cdot\cos\beta$, $F_{2z}=F_2\sin\beta$. При этом углы β и γ легко определяются из треугольников ODE и OBK. Углы, образованные направлением силы $\bar{F}_3$ с осями Ox и Oy, нельзя определить непосредственно из чертежа как углы β и γ.

Поэтому, чтобы найти проекции силы $\bar{F}_3$ на оси x и y, спроектируем эту силу сначала на плоскость xOy и полученную проекцию, которую обозначим через f_3, спроектируем затем на оси x и y.

Тогда

$$f_3=F_3\cdot\sin\delta,$$

$$F_{3x}=f_{3x}=f_3\cdot\sin\alpha=F_3\sin\delta\sin\alpha,$$

$$F_{3y}=f_{3y}=f_3\cos\alpha=F_3\sin\delta\cos\alpha.$$

Кроме того, $F_{3z}=F_3\cos\delta$, где $\alpha=\angle KOM$, $\delta=\angle DOC$.

Найденные значения проекций всех данных сил на координатные оси можно расположить в табл. 1

Таблица 1

Проекции	Силы		
	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$
F_x	$F_1 \sin\gamma$	0	$F_3 \sin\delta \sin\alpha$
F_y	0	$F_2 \cos\beta$	$F_3 \sin\delta \cos\alpha$
F_z	$F_1 \cos\gamma$	$F_2 \sin\beta$	$F_3 \cos\delta$

Теперь, из прямоугольных треугольников ODE, OBK, OMC и OMK находим:

$$\sin\gamma = \frac{DE}{OB} = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{OD}{OB} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{BK}{OB} = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{OK}{OM} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\sin\delta = \frac{OM}{OC}, \quad \cos\delta = \frac{CM}{OC}, \quad \sin\alpha = \frac{MK}{OM}, \quad \cos\alpha = \frac{OK}{OM},$$

и

$$\sin\delta\cos\alpha = \frac{OK}{OC} = \frac{a}{OC}, \quad \sin\delta\sin\alpha = \frac{MK}{OC} = \frac{b}{2OC}.$$

Из треугольников OCM и OMK имеем:

$$OC^2 = OM^2 + MC^2, \quad OM^2 = OK^2 + KM^2,$$

а потому

$$OC^2 = OK^2 + KM^2 + MC^2 \text{ и } OC = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4} + c^2}.$$

Подставляя значения a, b, c, получим:

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\delta = \frac{8}{9},$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\delta\sin\alpha = \frac{1}{9}, \quad \cos\alpha\sin\delta = \frac{4}{9}.$$

Проекции равнодействующей на оси x, y и z вычислим по формулам (9)

$$R_x = \frac{1}{\sqrt{17}}F_1 + \frac{1}{9}F_3 \approx 8{,}18 \ \textit{кГ},$$

$$R_y = \frac{1}{\sqrt{5}}F_2 + \frac{4}{9}F_3 \approx 22{,}28 \ \textit{кГ},$$

$$R_z = \frac{4}{\sqrt{17}}F_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}F_2 + \frac{8}{9}F_3 \approx 63{,}96 \ \textit{кГ}.$$

Модуль и направляющие косинусы равнодействующей определяем по формулам (10).

$$R=\sqrt{(8,18)^2+(22,28)^2+(63,96)^2}\approx 68,22\ кГ,$$

$$\cos(\overline{R},\ \overline{i})=\frac{8,18}{68,22}=0,119,$$

$$\cos(\overline{R},\ \overline{j})=\frac{22,28}{68,22}\approx 0,326,$$

$$\cos(\overline{R},\ \overline{k})=\frac{63,96}{68,22}\approx 0,937.$$

Примечание. Проекции силы $\overline{F}_3$ на координатные оси можно найти и другим способом.

Построив проекции этой силы, будем иметь (рис. 10б):

$$F_{3x}=OL=K_1M_1,\quad F_{3y}=OK_1,\quad F_{3z}=ON=C_1M_1.$$

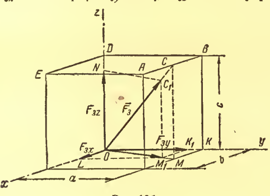


Рис. 10б

Так как $\triangle OKM \backsim OK_1M_1$ и $\triangle OCM \backsim \triangle OC_1M_1$, то

$$\frac{F_{3x}}{KM}=\frac{F_{3y}}{OK}=\frac{OM_1}{OM}\quad и\quad \frac{f}{OM}=\frac{F_{3z}}{CM}=\frac{F_3}{OC},$$

или

$$\frac{F_{3x}}{\frac{b}{2}}=\frac{F_{3y}}{a}=\frac{f}{OM}\quad и\quad \frac{f}{OM}=\frac{F_{3z}}{c}=\frac{F_3}{OC}.$$

Таким образом,

$$\frac{F_{3x}}{\frac{b}{2}}=\frac{F_{3y}}{a}=\frac{F_{3z}}{c}=\frac{F_3}{OC},$$

откуда

$$F_{3x}=F_3\cdot\frac{b}{2OC}=\frac{10}{3},$$

$$F_{3y}=F_3\cdot\frac{a}{OC}=\frac{40}{3},$$

$$F_{3z}=F_3\cdot\frac{c}{OC}=\frac{80}{3}.$$

§ 5. Реакции связей

При решении задач по статике, относящихся к равновесию твердого тела, почти всегда рассматриваемое тело является несвободным.

Условия, стесняющие свободу движения рассматриваемого тела, называются в механике **связями**. В статике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, соединенных с данным твердым телом или касающихся его. Обычно задача состоит в определении сил взаимодействия между данным твердым телом и телами, осуществляющими связи, наложенные на это тело. Сила, с которой связь, препятствующая перемещению данного твердого тела в каком-нибудь направлении, действует на это тело, называется **реакцией связи**.

Направление реакции связи противоположно тому направлению, в котором связь препятствует перемещению данного тела.

Основные типы связей

1. Тело опирается на абсолютно твердую гладкую неподвижную поверхность в точке A.

Реакция $\overline{N}$ такой поверхности направлена по общей нормали к поверхности данного тела и к опорной поверхности в точке A соприкосновения тела с опорой (рис. 11).

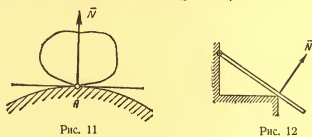


Рис. 11

Рис. 12

2. Тело опирается на неподвижную точку или на неподвижную линию.

Если пренебречь трением, то в этом случае реакция связи $\overline{N}$ приложена к телу в точке соприкосновения его с опорой и направлена по нормали к поверхности тела в этой точке (рис. 12).

3. Тело опирается на гладкую неподвижную плоскость катками, которые могут перемещаться по этой плоскости.

Реакция $\overline{R}_B$ такой опоры направлена перпендикулярно к плоскости, по которой могут перемещаться катки (рис. 13).

4. Связь осуществляется при помощи неподвижного цилиндрического шарнира.

В этом случае рассматриваемое тело может только вращаться вокруг неподвижной оси цилиндрического шарнира. Если трением

в шарнире пренебречь, то реакция неподвижного цилиндрического шарнира направлена по нормали к его цилиндрической поверхности, т. е. лежит в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира, и пересекает эту ось. Но направление реакции шарнира в этой плоскости заранее неизвестно; это направление приходится определять в каждом отдельном случае, т. е. в каждой конкретной задаче (рис. 13).

5. Связь осуществляется при помощи невесомого твердого стержня, шарнирно соединенного концами с данным телом, рав-

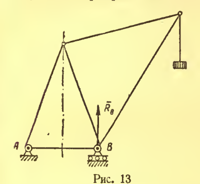


Рис. 13

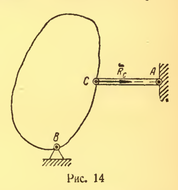


Рис. 14

новесие которого мы рассматриваем, и с другим каким-нибудь телом, например со стойкой, стеной или полом, причем никакие заданные силы к этому стержню не приложены (его весом пренебрегаем).

Реакция такого стержня, приложенная к данному телу, направлена вдоль стержня. При этом стержень может подвергаться как сжатию, так и растяжению (рис. 14).

6. Связь осуществляется гибкой, нерастяжимой нитью (цепью или канатом).

Реакция такой связи приложена в точке прикрепления нити к телу и направлена вдоль нити. При этом следует отметить, что нить может быть только растянута. Поэтому реакция нити может направляться вдоль нити только в одну сторону, а именно — от точки прикрепления нити к данному телу к другому закрепленному концу нити (рис. 15, силы $\bar{T}_A$ и $\bar{T}_B$).

Рис. 15

7. Связь осуществляется при помощи подпятника.

Подпятник A служит для укрепления пяты стойки и допускает только одно перемещение рассматриваемого твердого тела, а именно — вращение этого тела вокруг оси стойки. Основание подпятника препятствует перемещению тела по вертикали вниз

(вдоль оси стойки), а стенки подпятника препятствуют перемещению тела в плоскости, перпендикулярной к оси стойки (рис. 16). Поэтому реакция $\overline{Z}_A$ основания подпятника направлена по вертикали вверх, а реакция $\overline{R}_A$ стенок подпятника лежит в горизонтальной плоскости, но направление ее в этой плоскости в общем случае неизвестно; поэтому при решении задач ее нужно разложить на две составляющие по направлениям осей x и y, перпендикулярным к оси стойки (рис. 16).

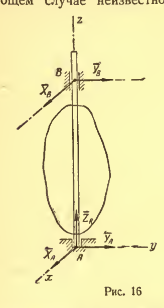


Рис. 16

8. Связь осуществляется при помощи неподвижного цилиндрического подшипника.

Подшипник B не препятствует вращению тела вокруг оси Az

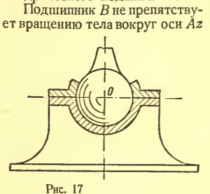


Рис. 17

и скольжению вдоль этой оси (рис. 16). Если трением пренебречь, то реакция $\overline{R}_B$ подшипника (реакция цилиндрической поверхности его стенок) пересекает ось вращения тела и лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси: так как подшипник не препятствует скольжению тела вдоль оси вращения, то нет и реакции, направленной вдоль этой оси.

9. Связь осуществляется при помощи сферического шарнира (рис. 17).

Сферический шарнир не препятствует вращению тела вокруг любой оси, проходящей через центр O этого шарнира (точку O). Реакция сферического шарнира проходит через центр шарнира O, а направление ее заранее указать нельзя. Поэтому при решении задач эту реакцию приходится разлагать на три составляющие по направлениям выбранных координатных осей.

§ 6. Равновесие системы сходящихся сил

Для того, чтобы система сходящихся сил находилась в равновесии, необходимо и достаточно равенства нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить одним век-

торным равенством:

$$\overline{R}=\sum\overline{F}_i=0 \tag{11}$$

или тремя скалярными равенствами:

$$\sum X_i=0,\quad \sum Y_i=0,\quad \sum Z_i=0, \tag{12}$$

где X_i, Y_i, Z_i — проекции силы $\overline{F}_i$ на координатные оси.

Если уравновешенная система сходящихся сил является плоской, то вместо трех равенств (12) будем иметь два:

$$\left.\begin{array}{l}\sum X_i=0,\\ \sum Y_i=0.\end{array}\right\} \tag{12'}$$

Уравнение (11) выражает условие замкнутости многоугольника данных сил, т. е. условие равновесия сходящихся сил в геометрической форме.

Уравнения (12) выражают условия равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме.

Задачи статики, относящиеся к равновесию несвободного твердого тела можно классифицировать, во-первых, по расположению линий действия сил, приложенных к рассматриваемому телу, и, во-вторых, каждую такую группу задач можно подразделять на отдельные виды по характеру связей, наложенных на данное тело. В этом параграфе мы рассмотрим равновесие системы сходящихся сил.

Задачи на равновесие системы сходящихся сил можно разделить на следующих два типа.

I. Равновесие плоской системы сходящихся сил.

II. Равновесие сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Задачи, относящиеся к первому типу, можно подразделить по характеру связей, наложенных на данное тело, на две группы:

1. Задачи, в которых линии действия всех реакций связей, наложенных на данное тело (равновесие которого рассматривается в задаче), известны.

К таким связям относятся:

а) невесомый стержень, одним концом шарнирно соединенный с данным телом, а другим концом закрепленный при помощи неподвижного шарнира;

б) неподвижная гладкая поверхность или неподвижная линия, на которую опирается данное тело;

в) гибкая нить (канат, трос);

г) подшипник.

2. Задачи, имеющие хотя бы одну связь, наложенную на данное тело, направление реакции которой заранее неизвестно.

Такими связями являются неподвижный цилиндрический шарнир и подпятник.

В задачах, относящихся к равновесию несвободного тела под действием системы сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, связи, наложенные на это тело, чаще всего осуществля-

ются гибкими телами, шарнирно закрепленными стержнями и неподвижными опорными плоскостями. В этих случаях линии действия реакций всех связей известны и, следовательно, задача сводится только к определению величины этих реакций.

При решении задач, относящихся к равновесию несвободного твердого тела, надо придерживаться следующего общего плана.

Необходимо выделить то тело, равновесие которого будем рассматривать в данной задаче, т. е. то тело, к которому приложены как заданные силы, так и те силы, которые требуется определить в данной задаче.

Далее необходимо выяснить, какие связи наложены на рассматриваемое тело, и учесть реакции этих связей.

При этом рекомендуется начертить выделенное тело, изобразить на чертеже в виде векторов заданные силы и реакции связей и установить, каким уравнениям равновесия должна удовлетворять эта система сил, а затем составить и решить эти уравнения.

Рассмотрим сначала решение таких задач, когда все приложенные к телу силы, включая и реакции связей, пересекаются в одной точке и лежат в одной плоскости.

В этом случае задачу можно решить двумя способами: или геометрическим (графически), или аналитическим (по способу проекций).

ЗАДАЧИ ТИПА I

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Первая группа

Задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны

(задачи 17—21, 26—32)

Пример 6

Груз, весом $G = 6$ *кГ*, подвешен на двух гибких нитях *AB* и *AC*, причем нить *AC* горизонтальна, а нить *AB* составляет с вертикалью угол φ. Найти силы натяжения нитей *AB* и *AC* (рис. 18).

Решение

Рассмотрим равновесие груза: к нему приложен вес $\bar{G}$, а нити *AC* и *AB* являются для этого груза связями. Реакции нитей $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ направлены соответственно вдоль этих нитей, как указано на рисунке.

Таким образом, груз находится в равновесии под действием трех сил $\bar{G}$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, которые пересекаются в одной точке. Равнодействующая такой уравновешивающейся системы сил должна быть

равна нулю, а потому

$$\overline{G}+\overline{T}_1+\overline{T}_2=0.$$

Далее задачу можно решить либо геометрически, либо аналитически.

Решим сначала задачу геометрически (рис. 19). Для этого построим замкнутый силовой треугольиик, начав его построение с известной силы $\overline{G}$. Из произвольиой точки a проведем вектор $\overline{ab}$, параллельиый даиной силе $\overline{G}$, длина которого в выбраином масштабе изображает величииу этой силы. Через точки a и b проведем два луча, параллельные силам $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, до их пересечения в точке c. Треугольиик abc и есть искомый замкнутый силовой треугольиик. Чтобы найти направлеиие иеизвестиых сил $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$, нужно обойти силовой треугольник по его периметру так, чтобы он замкнулся; направлеиие этого обхода определяется направлением известиой силы $\overline{G}$. Векторы $\overline{ca}$ и $\overline{bc}$ изображают неизвестные силы $\overline{T}_2$ и $\overline{T}_1$. Измерив длину сторон $\overline{ca}$ и $\overline{bc}$ силового треугольиика выбраииой единицей масштаба, иайдем числовое значеиие иеизвестных сил $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$.

Рис. 18

Рис. 19

Величииу сил $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ можно также найти тригонометрически из треугольиика abc, в котором известиы сторона $ab=G$ и два угла: $\angle abc=\varphi$ (углы abc и ABD равиы, как углы с параллельиыми стороиами) и $\angle bac=90°$ (см. рис. 18 и 19).

Решая этот прямоугольный треугольиик, находим:

$$T_1=\frac{G}{\cos\varphi} \text{ и } T_2=G\operatorname{tg}\varphi.$$

Решим теперь эту задачу аиалитическим способом; для этого иужио составить два уравнения равиовесия.

Выберем координатные оси, как указаио иа рис. 18, и иайдем проекции каждой силы на этой оси.

Известно, что значение проекции силы на ось равио произведению величииы силы на косииус острого угла между направлеиием силы и осью проекций.

При этом, если направление силы составляет острый угол с положительным направлением оси проекций, то проекция силы иа эту ось положительиа.

Если же направление силы составляет острый угол с отрицательным направлением оси проекций, то проекция силы на эту ось отрицательна.

Сила $\overline{T}_2$ совпадает с положительным направлением оси Ox, а потому проекция ее на эту ось равна величине самой силы, а ее проекция на ось Oy равна нулю. Сила $\overline{G}$ совпадает с положительным направлением оси Oy, а потому

$$G_x = 0, \quad G_y = G.$$

Сила $\overline{T}_1$ составляет острый угол φ с отрицательным направлением оси Oy и острый угол $(90° - \varphi)$ с отрицательным направлением оси Ox, а потому

$$T_{1x} = -T_1 \cos(90° - \varphi) = -T_1 \sin\varphi,$$
$$T_{1y} = -T_1 \cos\varphi.$$

При равновесии тела сумма проекций всех приложенных к телу сил на каждую из координатных осей равна нулю. Таким образом, получаем следующих два уравнения равновесия:

$$1)\ T_2 - T_1 \sin\varphi = 0, \quad 2)\ G - T_1 \cos\varphi = 0.$$

Решим теперь эту систему уравнений относительно неизвестных T_1 и T_2:

$$T_1 = \frac{G}{\cos\varphi}, \quad T_2 = T_1 \sin\varphi = G\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Пример 7

Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной при помощи шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила $P = 1000$ *кГ*. Определить реакции этих стержней на шарнирный болт, если $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ (рис. 20).

Решение

К шарнирному болту C, который находится в равновесии, приложены сила $\overline{P}$ и реакции стержней AC и BC на этот болт.

Реакции стержней AC и BC направлены вдоль этих стержней (см. стр. 17). Обозначим реакцию стержня BC через $\overline{S}_1$, а реакцию стержня AC через $\overline{S}_2$. Следовательно, болт C находится в равновесии под действием трех сил — $\overline{P}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, поэтому равнодействующая этих сил равна нулю, т. е.

$$\overline{P} + \overline{S}_1 + \overline{S}_2 = 0.$$

Теперь задачу можно решить либо геометрически, либо аналитически.

Решим сначала эту задачу геометрически: построим замкнутый треугольник abc для сил $\overline{P}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, начав построение с из-

вестной силы $\overline{P}$, которую изобразим вектором $\overline{ab}$ (рис. 21), тогда вектор $\overline{bc}$ определит силу $\overline{S}_1$, а вектор $\overline{ca}$ — силу $\overline{S}_2$. Измерив отрезки $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ выбранной единицей масштаба, найдем величины неизвестных сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, — и задача будет графически решена.

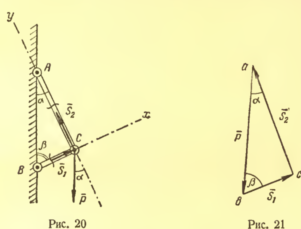


Рис. 20 Рис. 21

Величины неизвестных сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ можно найти тригонометрически, решив силовой треугольник *abc*, так как в этом треугольнике известны сторона *ab* и два угла.

Действительно, (см. рис. 20 и 21), по построению $ac \parallel AC$, $ab \parallel AB$ и $bc \parallel BC$, а потому $\angle abc = \beta$ и $\angle bac = \alpha$. Но $\alpha + \beta = 90°$ по условию задачи; следовательно, треугольник *abc* — прямоугольный, из этого треугольника находим:

$$S_1 = P \sin \alpha = \frac{P}{2} \quad \text{и} \quad S_2 = P \cos \alpha = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Мы нашли реакции $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ стержней *BC* и *AC*, т. е. те силы, с которыми эти стержни действуют на болт *C*. Важно при этом определить, будут ли стержни *BC* и *AC* работать на сжатие или растяжение. Для этого рассмотрим равновесие каждого стержня отдельно; начнем со стержня *AC* (рис. 22а).

Реакция стержня *AC*, приложенная к болту *C*, направлена *от болта C внутрь отрезка AC*. Но тогда сила $\overline{S}_2'$, с которой болт *C* действует на стержень *AC*, или иначе, реакция болта *C*, приложенная к стержню *AC*, равна по величине и противоположна по направлению силе $\overline{S}_2$, т. е. $\overline{S}_2' = -\overline{S}_2$.

Стержень *AC* находится в равновесии под действием двух сил: реакции $\overline{S}_2'$ шарнирного болта *C* и реакции неподвижного шарнира *A*, которую обозначим через $\overline{S}_2''$. Отсюда следует, что

силы $\overline{S}_2'$ и $\overline{S}_2''$ направлены по одной прямой, равны по величине и противоположны по направлению, т. е. $\overline{S}_2' = -\overline{S}_2''$.

Силы $\overline{S}_2'$ и $\overline{S}_2''$, приложенные к концам стержня AC, вызывают, очевидно, растяжение этого стержня. Отсюда заключаем, что если вектор $\overline{S}_2$, изображающий реакцию стержня AC на болт C и показанный на самом стержне, направлен от узла C, то стержень растянут.

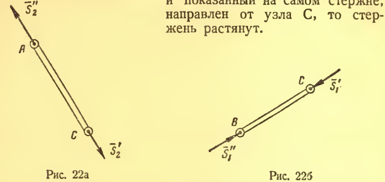


Рис. 22а

Рис. 22б

Теперь рассмотрим стержень BC (рис. 22б). Реакция $\overline{S}_1$ этого стержня на шарнир C, начерченная на самом стержне BC, направлена, как видно, к шарниру C. Аналогично предыдущему заключаем, что реакция $\overline{S}_1'$ шарнира C на стержень BC, приложенная к этому стержню, будет равна по величине и прямо противоположна по направлению силе $\overline{S}_1$, т. е. $\overline{S}_1' = -\overline{S}_1$.

Так как стержень BC находится в равновесии, то реакция $\overline{S}_1''$ неподвижного шарнира B, приложенная к этому стержню, равна по величине и прямо противоположна по направлению силе $\overline{S}_1'$, т. е. $\overline{S}_1'' = -\overline{S}_1'$. Очевидно, что силы $\overline{S}_1''$ и $\overline{S}_1'$, приложенные к стержню BC, сжимают этот стержень.

Поэтому можно сказать, что если вектор $\overline{S}_1$, изображающий реакцию стержня BC на болт C и начерченный на самом стержне, направлен *к узлу C, то стержень сжат*.

Таким образом, сформулируем следующее правило.

Если вектор, изображающий силу, с которой данный стержень действует на шарнирный болт (узел) (т. е. силу реакции этого стержня на болт), изображенный на самом стержне, *направлен от болта* (от узла), *то стержень растянут*. Если же этот вектор *направлен к болту* (к узлу), *то стержень сжат*.

Рассмотрим теперь аналитический способ решения данной задачи.

Так как угол между неизвестными силами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ равен 90°, то удобнее всего оси координат направить по линиям действия этих сил; уравнения равновесия принимают при этом наиболее простой вид. Направим ось Ox по линии действия силы $\overline{S}_1$, а ось

y — по линии действия силы $\overline{S}_2$, как показано на рис. 20, и найдем проекции всех сил, приложенных к шарниру C, на эти оси. Тогда будем иметь:

$$S_{1x}=S_1,\ \ S_{2x}=0,\ \ P_x=-P\cos\beta,$$
$$S_{1y}=0,\ \ S_{2y}=S_2,\ \ P_y=-P\cos\alpha.$$

Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей, получим два уравнения равновесия:

$$S_1-P\cos\beta=0,$$
$$S_2-P\cos\alpha=0.$$

Из этих уравнений находим:

$$S_1=P\cos\beta=\frac{P}{2},$$

$$S_2=P\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}P.$$

Примечание. При аналитическом способе решения этой задачи заранее неизвестно, в какую сторону следует направить реакции $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ по прямым AC и BC. В таких случаях эти реакции можно направлять по соответствующим стержням в ту или другую сторону произвольно. Если в результате решения уравнений равновесия для этих реакций получим положительные значения, то реакции были направлены верно. Если же для какой-нибудь из этих неизвестных сил получим отрицательное значение, то выбранное направление реакции нужно изменить на противоположное.

В дальнейшем условимся неизвестную реакцию стержня, приложенную к шарнирному болту (к узлу), направлять по самому стержню от этого узла. Если, решая уравнения равновесия, мы получим для этой реакции положительное значение, то реакция направлена верно и, следовательно *стержень растянут*. Если же для искомой реакции получим отрицательное значение, то это укажет на то, что в действительности реакция данного стержня имеет направление, противоположное принятому нами, т. е. она направлена *к узлу* и, следовательно, данный *стержень сжат*.

Таким образом, при указанном условии относительно направления реакции стержня по знаку этой реакции можно определить, будет ли данный стержень растянут или сжат.

Пример 8

Груз весом $P=6$ *т* подвешен при помощи каната, перекинутого через небольшой блок A и идущего к лебедке D. Определить усилия в стержнях AC и BA крана. Углы, определяющие направление стержней и каната, заданы на рис. 23.

Решение

Рассмотрим равновесие узла A крана, к которому приложена сила $\overline{P}$, реакции стержней AC и AB и сила натяжения каната AD. Обозначим реакцию стержня AB через $\overline{S}_1$, реакцию стержня AC через $\overline{S}_2$ и силу натяжения каната AD через $\overline{T}$.

Реакции стержней $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ направим вдоль этих стержней от узла A; сила $\overline{T}$ направлена, очевидно, вдоль каната от A к D, так как канат растянут. Кроме того, $T=P$, так как при отсутствии трения в блоке натяжение каната, перекинутого через этот блок, во всех точках одинаково.

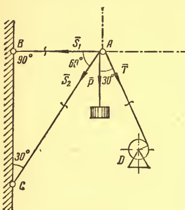


Рис. 23

Так как узел A находится в равновесии под действием сил $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{P}$, $\overline{T}$, то можно составить два уравнения равновесия этой системы сходящихся сил.

Выберем оси координат, как указано на рис. 23, найдем проекцию каждой силы на эти оси и составим два уравнения равновесия, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей:

$$-S_1-S_2\cos 60°+T\cos 60°=0,$$
$$-S_2\cos 30°-P-T\cos 30°=0.$$

Из второго уравнения находим:

$$-S_2=\frac{P}{\cos 30°}+T=P\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\approx$$
$$\approx 12{,}91\ m \text{ и } S_2=-12{,}91\ m.$$

Теперь из первого уравнения получаем:

$$S_1=T\cos 60°-S_2\cos 60°=\frac{T-S_2}{2}=\frac{P+P\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}{2}=$$

$$=P\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=9{,}46\ m.$$

Так как полученное значение силы $\overline{S}_2$ отрицательно, то сила $\overline{S}_2$ имеет направление, противоположное направлению, выбранному на рисунке, т. е. она направлена от C к A, и, следовательно, стержень AC сжат.

Задачу можно решить и геометрически, построив замкнутый многоугольник сил $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ (рис. 24).

Направления сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ найдем после того, как обойдем периметр построенного силового многоугольника, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил $\overline{P}$ и $\overline{T}$.

Измерив стороны cd и da силового многоугольника выбранной единицей масштаба, найдем величину искомых сил $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Так как углы между силами $\overline{P}$, $\overline{T}$, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ заданы, то можно найти углы силового многоугольника, а затем вычислить и длины двух неизвестных его сторон. В самом деле, из построения силового многоугольника следует, что

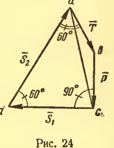


Рис. 24

$$\angle dcb = 90°, \quad \angle cda = 60°, \quad \angle bad = 60°,$$

а потому

$$\angle abc = 360° - (90° + 60° + 60°) = 150°.$$

Если соединим точки a и c, то треугольник abc будет равнобедренным, так как $P = T$, а потому

$$\angle bac = \angle bca = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Отсюда следует, что

$$\angle dca = 75°, \quad \angle cad = 45°$$

и

$$ac = 2ab\cos 15° = 2P\cos 15°.$$

Применяя теперь к треугольнику adc теорему синусов, получим:

$$\frac{ac}{\sin 60°} = \frac{S_2}{\sin 75°} = \frac{S_1}{\sin 45°},$$

откуда

$$S_1 = \frac{2P\cos 15° \cdot \sin 45°}{\sin 60°} \approx 9{,}4\ m,$$

а

$$S_2 = \frac{2P\cos 15° \cdot \sin 75°}{\sin 60°} \approx 12{,}9\ m.$$

Чтобы определить, будут ли стержни AB и AC сжаты или растянуты (рис. 23), перенесем векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ с силового многоугольника на стороны AB и AC; тогда сила $\overline{S}_2$ будет направлена к узлу A, а сила $\overline{S}_1$ будет направлена от узла A, а потому стержень AC сжат, а стержень AB растянут.

Вторая группа

Задачи, в которых имеются такие связи, что направление их реакций неизвестно

(задачи 36—41, 43)

Пример 9

Балка AB шарнирно закреплена в точке A, а концом B свободно опирается на гладкую вертикальную стену. В середине балки под углом $\beta = 60°$ приложена сила P, равная 400 *кГ*. Определить реакции в точках A и B, пренебрегая весом балки, если угол балки с горизонтом $\alpha = 30°$ (рис. 25).

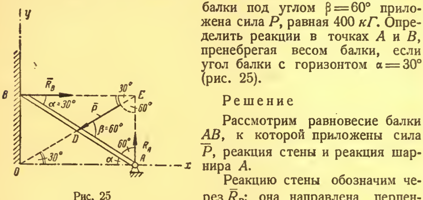


Рис. 25

Решение

Рассмотрим равновесие балки AB, к которой приложены сила $\overline{P}$, реакция стены и реакция шарнира A.

Реакцию стены обозначим через $\overline{R}_B$; она направлена перпендикулярно к плоскости стены вправо. Реакция $\overline{R}_A$ неподвижного шарнира приложена к балке в точке A, но направление ее неизвестно.

Для определения линии действия реакции $\overline{R}_A$ воспользуемся теоремой о трех непараллельных уравновешенных силах.

Так как балка AB находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Поэтому, если продолжим линии действия сил $\overline{P}$ и $\overline{R}_B$ до их пересечения в точке E, то сила $\overline{R}_A$, приложенная в точке A, должна пройти через точку E, а потому она направлена по прямой AE.

После того, как линия действия реакции $\overline{R}_A$ определена, задачу можно решить или геометрически (построением замкнутого силового треугольника) или аналитически (методом проекций).

Построим замкнутый силовой треугольник, начав построение с известной силы $\overline{P}$ (рис. 26).

Чтобы найти направления сил $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ на силовом треугольнике, нужно обойти периметр этого треугольника, причем направление обхода определяется направлением заданной силы $\overline{P}$. Тогда вектор $\overline{bc}$ определит силу $\overline{R}_B$, а вектор $\overline{ca}$ — силу $\overline{R}_A$. Если определить углы в построенном силовом треугольнике, то можно

вычислить длины его сторон, т. е. вычислить величину сил $\overline{R}_B$ и $\overline{R}_A$. Рассмотрим треугольник BDE (рис. 25). В этом треугольнике

$$\angle DEB = \beta - \alpha = 30°,$$

а потому $BD = DE$.
Но по условию задачи $BD = DA$.
Следовательно,

$$DA = DE$$

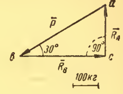


Рис. 26

и

$$\angle AED = \frac{180° - \beta}{2} = 60°,$$

а потому

$$\angle BEA = 30° + 60° = 90°, \text{ т. е. } \overline{R}_A \perp \overline{R}_B.$$

Отсюда следует, что силовой треугольник является прямоугольным, причем

$$\angle abc = \angle BED = 30°.$$

Из этого треугольника находим:

$$R_A = P \sin 30° = 200 \ кГ, \ R_B = P \cdot \cos 30° = \\ = 200\sqrt{3} \approx 346 \ кГ.$$

Решим теперь задачу по способу проекций. Направим ось Ox (рис. 25) параллельно силе $\overline{R}_B$, а ось Oy перпендикулярно к ней. Проектируя все силы на эти оси и составляя два уравнения равновесия, получим:

$$\Sigma X = R_B - P \cos 30° = 0,$$
$$\Sigma Y = R_A - P \cos 60° = 0.$$

Отсюда

$$R_B = P \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} P \approx 346 \ кГ,$$
$$R_A = P \cos 60° = \frac{P}{2} = 200 \ кГ.$$

В заключение можно сделать следующие выводы.

1. Если линии действия реакций всех связей, наложенных на данное тело, равновесие которого рассматривается в задаче, известны, то при геометрическом способе решения задачи нужно построить замкнутый силовой многоугольник, начиная построение его с известных сил. Число неизвестных сил не должно быть больше двух.

В случае, когда число всех приложенных к данному телу сил, включая и реакции связей, равно трем, задача сводится к построению силового треугольника по заданной стороне и заданным направлениям двух других его сторон.

После того, как построен замкнутый силовой многоугольник, две неизвестные силы можно определить либо непосредственным измерением, либо вычислением.

При тригонометрическом решении силового треугольника обычно применяется теорема синусов.

Однако иногда бывает удобнее, вместо теоремы синусов, применить метод подобия, т. е., исходя из условия задачи, найти такой треугольник с известными сторонами, который был бы подобен силовому треугольнику. Тогда легко определить неизвестные стороны силового треугольника из условия пропорциональности соответственных сторон подобных треугольников.

2. При аналитическом способе решения задачи нужно выбрать систему координатных осей, найти углы, образуемые каждой силой с этими осями, и вычислить проекции каждой силы на координатные оси; затем нужно составить два уравнения равновесия, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей, и решить эти уравнения.

Если в результате решения этих уравнений значение какой-либо неизвестной силы получилось отрицательным, то это значит, что эта сила имеет направление, противоположное тому, которое мы выбрали для нее при составлении уравнений равновесия. Следует иметь в виду, что если число всех сил, приложенных к данному телу, больше трех, то вычисление величины искомых в задаче сил тригонометрическим способом становится обычно громоздким. В этом случае предпочтительней аналитический способ решения.

3. Когда линия действия какой-либо реакции неизвестна, как, например в случае неподвижного цилиндрического шарнира или подпятника, а число сил, приложенных к данному телу, равно трем, то, применяя теорему о пересечении в одной точке трех непараллельных уравновешенных сил, можно найти точку, через которую приходит эта неизвестная реакция. Так как точка приложения неизвестной реакции задана, то тем самым определяется ее линия действия. Далее задача решается или геометрическим, или аналитическим способом, как это было указано в рассмотренных выше примерах.

ЗАДАЧИ ТИПА II

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ, НЕ ЛЕЖАЩИХ В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

(задачи 212, 213, 215, 217)

В настоящем параграфе рассмотрим равновесие тела, к которому приложена система сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

В общем случае задачи, относящиеся к равновесию неплоской системы сходящихся сил, проще решать аналитическим способом при помощи трех уравнений равновесия.

При этом необходимо обратить внимание на нахождение проекций сил на координатные оси.

Следует иметь в виду, что если имеем систему четырех уравновешенных сил, не лежащих в одной плоскости, то задачу часто можно решить проще, заменив две заданные силы их равнодействующей; так как три уравновешенные силы всегда лежат в одной плоскости, то задачу о равновесии четырех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, можно свести, таким образом, к задаче о равновесии плоской системы трех сил, решение которой рассмотрено в предыдущем параграфе.

Пример 10

Груз P весом 10 *т* поддерживается при помощи каната, перекинутого через блок O и идущего к лебедке E. Определить усилия в стержнях AO, OB, OC крана, если плоскость OAB горизонтальна, $AD = DB$, $OA = OB$, $\angle DCO = 60°$, $\angle COE = 30°$ и $\angle AOB = 90°$ (рис. 27).

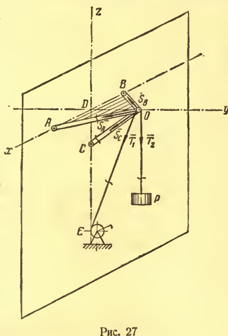


Рис. 27

Решение

Рассмотрим равновесие шарнирного болта O, к которому приложены реакции стержней $\overline{S}_A$, $\overline{S}_B$, $\overline{S}_C$ и силы натяжения каната $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$. Так как натяжение каната во всех его точках одинаково, то $T_1 = T_2 = P$.

Так как стержни закреплены шарнирно и их весом мы пренебрегаем, то реакции стержней направлены вдоль этих стержней. Допустим, что стержни растянуты, т. е. реакции направлены от узла O. Силы $\overline{S}_A$, $\overline{S}_B$, $\overline{S}_C$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ не лежат в одной плоскости.

Составим три уравнения равновесия этих сил, для чего выберем сначала систему координатных осей x, y, z так, чтобы силы $\overline{S}_A$, $\overline{S}_B$, $\overline{S}_C$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ лежали в координатных плоскостях; ось Dz направим перпендикулярно к плоскости AOB; начало координат выберем в точке D, а оси x и y направим соответственно по прямым AB и OD. Тогда силы $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ будут расположены в плоскости xOy, а силы $\overline{S}_C$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ — в вертикальной

плоскости zDy. При таком выборе координатных осей легко определить углы каждой силы с координатными осями, а следовательно, и ее проекции на эти оси. Так как силы $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ лежат в плоскости xDy, то $S_{Az}=S_{Bz}=0$. Найдем углы, составляемые этими силами и осями x и y. По условию задачи $AO=OB$, а потому треугольник AOB — равнобедренный; кроме того, $AD=DB$ и $\angle AOB=90°$. Следовательно, прямая OD есть биссектриса угла AOB и $\angle DAO=\angle DBO=45°$.

Теперь находим проекции сил $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ на координатные оси x и y.

Проекции S_{Bx}, S_{Ay}, S_{By}, очевидно, отрицательны, так как силы $\overline{S}_A$ и $\overline{S}_B$ образуют острые углы с отрицательным направлением оси Dy, а сила $\overline{S}_B$ образует острый угол и с отрицательным направлением оси Dx.

$$S_{Ax}=S_A\cdot\cos 45°, \qquad S_{Bx}=-S_B\cdot\cos 45°,$$
$$S_{Ay}=-S_A\cdot\cos 45°, \qquad S_{By}=-S_B\cdot\cos 45°.$$

Силы $\overline{S}_C$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ лежат в плоскости zDy, а потому они перпендикулярны к оси Dx и, следовательно,

$$T_{1x}=T_{2x}=S_{Cx}=0.$$

Сила $\overline{T}_2$ параллельна оси Dz, а потому $T_{2y}=0$ и $T_{2z}=-P$. Углы между силой $\overline{S}_C$ и осями y и z заданы по условию задачи, а потому находим:

$$S_{Cz}=-S_C\cdot\cos 60°, \quad S_{Cy}=-S_C\cdot\cos 30°.$$

Остается найти углы силы $\overline{T}_1$ с осями y и z. Для этого рассмотрим треугольник OCE. Угол DCO — внешний угол этого треугольника, а потому он равен сумме углов COE и CEO, т. е. $60°=30°+\angle CEO$, откуда $\angle CEO=30°$. Из прямоугольного треугольника ODE находим, что $\angle DOE=60°$. Таким образом, сила $\overline{T}_1$ образует острый угол в 30° с отрицательным направлением оси z и острый угол в 60° с отрицательным направлением оси y, а потому

$$T_{1y}=-T_1\cdot\cos 60° \text{ и } T_{1z}=-T_1\cdot\cos 30°.$$

Проведенные вычисления проекций можно расположить в виде табл. 2.

Составим теперь три уравнения равновесия, для чего достаточно приравнять нулю сумму проекций всех сил на каждую координатную ось:

$$1)\ S_A\cdot\cos 45°-S_B\cos 45°=0,$$
$$2)\ -S_A\cdot\cos 45°-S_B\cos 45°-S_C\cdot\cos 30°-T_1\cdot\cos 60°=0,$$
$$3)\ -T_2-T_1\cdot\cos 30°-S_C\cdot\cos 60°=0;$$

	Силы				
	$\overline{S}_A$	$\overline{S}_B$	$\overline{S}_C$	$\overline{T}_1$	$\overline{T}_2$
Острый угол силы с осью x	45°	45°	90°	90°	90°
Знак проекции силы на ось x	+	—			
Проекция силы на ось x	$+S_A\cdot\cos 45°$	$-S_B\cdot\cos 45°$	0	0	0
Острый угол силы с осью y	45°	45°	30°	60°	90°
Знак проекции силы на ось y	—	—	—	—	
Проекция силы на ось y	$-S_A\cdot\cos 45°$	$-S_B\cdot\cos 45°$	$-S_C\cdot\cos 30°$	$-T_1\cdot\cos 60°$	0
Острый угол силы с осью z	90°	90°	60°	30°	0°
Знак проекции силы на ось z			—	—	—
Проекция силы на ось z	0	0	$-S_C\cdot\cos 60°$	$-T_1\cdot\cos 30°$	$-T_2$

или

$$S_A-S_B=0,$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}S_A-\frac{\sqrt{2}}{2}S_B-\frac{\sqrt{3}}{2}S_C-\frac{1}{2}T_1=0,$$
$$P+P\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{S_C}{2}=0.$$

Решая эту систему трех уравнений относительно неизвестных S_A, S_B, S_C, получим:

$$-S_C=2P+P\sqrt{3}=P(2+\sqrt{3})=+10(\sqrt{3}+2),$$

или

$$S_C\approx-10\cdot 3{,}73=-37{,}3\ кГ,\ S_A=S_B$$

и

$$-\sqrt{2}S_A=\frac{P}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}S_C=5-5\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=$$
$$=-10\sqrt{3}-10\approx-27{,}3\ кГ,$$

или

$$S_A=S_B=\frac{27{,}3}{\sqrt{2}}\approx 19{,}3\ кГ.$$

Так как мы получили отрицательное значение для силы S_C, то выбранное нами направление этой силы нужно изменить на противоположное; следовательно, стержень CO не растянут, как мы предполагали, а сжат.

Пример 11

На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, лежит шар M весом $P = 100$ *кГ*. Шар удерживается в равновесии при помощи двух одинаковых нитей, закрепленных в точках A и B вертикальной плоскости, причем прямая AB горизонтальна (рис. 28).

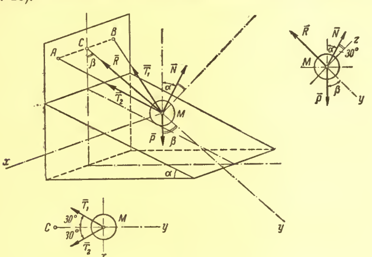


Рис. 28

Определить реакцию наклонной плоскости и реакции нитей, если $\alpha = 30°$, $\angle AMB = 60°$ и угол β между вертикальной плоскостью и плоскостью AMB равен 30°.

Решение

Рассмотрим равновесие шара M, к которому приложены вес $\bar{P}$, реакции нитей $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ и реакция наклонной плоскости $\bar{N}$, линии действия которых указаны на рисунке. Линии действия сил $\bar{P}$, $\bar{N}$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ пересекаются в центре шара.

В данном случае мы имеем систему четырех уравновешенных сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости.

Из точки M опустим перпендикуляр MC на прямую AB. Так как нити AM и BM имеют одинаковую длину, то треугольник AMB — равнобедренный; поэтому его высота MC разделит угол AMB пополам, и, следовательно,

$$\angle AMC = \angle BMC = 30°.$$

Если через точку C проведем вертикальную прямую, то угол между этой вертикалью и прямой CM, будет $\beta = 30°$. Начало координат возьмем в центре шара M; ось y направим по прямой MC, а ось x — параллельно прямой AB; ось z направим по перпендикуляру к плоскости AMB, тогда силы $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ будут расположены в координатной плоскости xMy, а силы $\overline{P}$ и $\overline{N}$ — в плоскости zMy, так как каждая из них перпендикулярна к оси Mx. Угол между силой $\overline{P}$ и осью y будет, очевидно, равен углу $\beta = 30°$. Так как сила $\overline{N}$ направлена по нормали к опорной наклонной плоскости, то угол между этой силой и вертикалью, проходящей через точку M, будет равен углу $\alpha = 30°$. Поэтому угол между силой $\overline{N}$ и осью z равен

$$90° - (\alpha + \beta) = 30°.$$

Зная углы, которые силы $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{N}$ и $\overline{P}$ составляют с выбранными координатными осями, находим их проекции на эти оси:

$$T_{1z} = T_{2z} = 0, \quad P_x = N_x = 0, \quad T_{1y} = -T_1 \cdot \cos 30°,$$
$$N_z = N \cdot \cos 30°, \quad T_{1x} = -T_1 \cdot \cos 60°, \quad T_{2y} = -T_2 \cdot \cos 30°,$$
$$P_z = -P \cos(90° - \beta), \quad T_{2x} = T_2 \cdot \cos 60°, \quad P_y = P \cdot \cos\beta,$$
$$N_y = -N \cdot \cos 60°.$$

Приравнивая нулю сумму проекций всех сил на каждую из координатных осей, получим следующих три уравнения равновесия:

$$1)\ \Sigma X_i = -\frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = 0,$$
$$2)\ \Sigma Y_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} T_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} T_2 - \frac{N}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} P = 0,$$
$$3)\ \Sigma Z_i = \frac{\sqrt{3}}{2} N - \frac{P}{2} = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$N = \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} P \approx \frac{100}{3} \cdot 1{,}71 = 57\ кГ.$$

Из первого уравнения следует, что $T_1 = T_2$, а потому второе уравнение принимает вид:

$$2\sqrt{3}\, T_1 = \sqrt{3} P - N = \sqrt{3}\, P - \frac{\sqrt{3}}{3} P = \frac{2\sqrt{3}}{3} P,$$

откуда

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}3\ кГ.$$

Эту задачу можно решить несколько проще, приведя систему сил $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{N}$, $\overline{P}$ к трем силам, для чего нужно сложить силы $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$. Пусть $\overline{R}$ есть равнодействующая этих двух сил, т. е.

$$\overline{R} = \overline{T}_1 + \overline{T}_2.$$

Так как три силы $\overline{R}$, $\overline{P}$, $\overline{N}$ находятся в равновесии, то они лежат в одной плоскости. Следовательно, сила $\overline{R}$ лежит в той же плоскости, в которой расположены силы $\overline{N}$ и $\overline{P}$, т. е. в плоскости zMy; с другой стороны, эта сила $\overline{R}$ лежит в плоскости AMB, т. е. в плоскости xMy. Отсюда следует, что сила $\overline{R}$ направлена по линии пересечения плоскостей zMy и xMy, т. е. по оси y, как показано на рисунке. Проектируя теперь силы $\overline{R}$, $\overline{N}$ и $\overline{P}$ на оси y и z, получим два уравнения равновесия:

$$1)\ -R-N\cos 60^\circ+P\cos 30^\circ=0,$$
$$2)\ N\cdot\cos 30^\circ-P\cos 60^\circ=0.$$

Отсюда находим:

$$N=\frac{P\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{P}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}P,$$
$$R=\frac{P\sqrt{3}}{2}-\frac{P\sqrt{3}}{6}=\frac{P\sqrt{3}}{3}.$$

Равнодействующая $\overline{R}$ направлена по биссектрисе MC угла BMA между составляющими силами $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$; отсюда следует, что эти составляющие силы равны по величине, т. е. $T_1=T_2$.

Так как угол между силами $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ равен 60°, то

$$R=2T\cdot\cos 30^\circ,$$

откуда находим:

$$T_1=T_2=\frac{R}{2\cos 30^\circ}=\frac{R}{\sqrt{3}}=\frac{P}{3}=33{,}3\ кГ.$$

ГЛАВА II

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1. Момент силы относительно точки

Моментом силы $\overline{F}$ относительно данной точки O называется произведение величины силы на ее плечо, т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия этой силы. Если сила $\overline{F}$ стремится вращать тело вокруг данной точки O в направлении, обратном движению часовой стрелки, то условимся момент силы $\overline{F}$ относительно точки O считать положительным; если же сила стремится вращать тело вокруг точки O в направлении, совпадающем с направлением движения часовой стрелки, то момент силы относительно этой точки будем считать отри-

цательным. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} m_O(\overline{F}) &= -F\cdot h \text{ (рис. 29а)} \\ m_O(\overline{F}_1) &= +F_1\cdot h_1 \text{ (рис. 29б).} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

и

Если линия действия силы $\overline{F}$ проходит через данную точку O, то момент силы $\overline{F}$ относительно этой точки равен нулю.

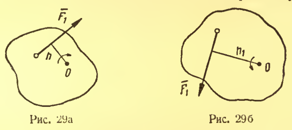


Рис. 29а Рис. 29б

Момент силы, приложенной к твердому телу, относительно данной точки O является мерой вращательного эффекта этой силы при вращательном движении тела вокруг точки O.

Пример 12

Веревка $BC = a$, привязанная к столбу под углом α, натягивается силой, величина которой равна P.

Определить момент этой силы относительно точки A (опрокидывающий момент). При каком значении угла α этот момент достигает наибольшей величины (рис. 30)?

Решение

Для того чтобы найти момент силы $\overline{P}$ относительно точки A, сначала нужно найти длину перпендикуляра, опущенного из точки A на линию действия силы $\overline{P}$. Пусть $AD \perp BC$. Тогда из треугольника ABD имеем:

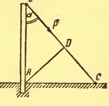


Рис. 30

$$AD = AB\cdot\sin a.$$

Но

$$AB = BC\cdot\cos\alpha,$$

а потому

$$AD = BC\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}a\sin 2\alpha.$$

Так как сила $\overline{P}$ стремится вращать столб AB вокруг точки A по движению часовой стрелки, то момент силы $\overline{P}$ относительно

точки A отрицателен, а по абсолютной величине равен

$$P \cdot AD = \frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cdot P,$$

т. е.

$$m_A(\overline{P}) = -\frac{1}{2} a \sin 2\alpha \cdot P.$$

Этот момент достигает максимальной величины при условии, что

$$\sin 2\alpha = 1,$$

т. е. при

$$2\alpha = 90°,$$

или

$$\alpha = 45°.$$

§ 2. Приведение плоской системы сил к данному центру

Сложение сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выполнить двумя способами:

1) последовательным сложением;

2) приведением данной системы сил к произвольно выбранному центру.

Первый способ становится громоздким при большом числе слагаемых сил и неприменим для пространственной системы сил, второй же способ является общим, более простым и удобным. Если задана плоская система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots \overline{F}_n$, расположенных как угодно, то, перенося все эти силы в произвольно выбранную точку O, называемую центром приведения, получим приложенную в этом центре силу.

$$\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i \tag{14}$$

и пару с моментом

$$M_O = \Sigma m_O(\overline{F}_i). \tag{15}$$

Геометрическая сумма сил данной системы называется главным вектором этой системы сил.

Алгебраическая сумма моментов сил плоской системы относительно какой-нибудь точки O называется главным моментом этой системы сил относительно этой точки O.

Главный момент изменяется с изменением центра приведения; зависимость главного момента от выбора центра приведения выражается следующей формулой:

$$M_{O_1} = M_O + m_{O_1}(\overline{R}), \tag{16}$$

где O и O_1 — два различных центра приведения.

Так как сила $\overline{R}$ и пара с моментом M_O, получающаяся в результате приведения данной плоской системы сил к центру O, лежат в одной плоскости, то их можно привести к одной силе $\overline{R}^* = \overline{R}$, приложенной в некоторой точке O_1. Эта сила $\overline{R}^*$ является равнодействующей данной плоской системы сил.

Таким образом, если $R \neq O$, $M_O \neq O$, то система сил приводится к одной равнодействующей, не проходящей через центр приведения O. При этом момент равнодействующей относительно любой точки будет равен алгебраической сумме моментов всех данных сил относительно той же точки (теорема Вариньона).

Если начало координат выбрано в центре приведения и известны проекции всех сил на оси координат и координаты точек приложения этих сил, то момент равнодействующей находим по формуле:

$$m_O(\overline{R}) = \Sigma x_i Y_i - y_i X_i. \quad (17)$$

Если в результате приведения окажется, что главный вектор равен нулю, а главный момент отличен от нуля, то данная система сил эквивалентна паре сил, причем главный момент этой системы будет равен моменту этой пары и не будет зависеть в данном случае от выбора центра приведения. Если $M_O = 0$, а $R \neq 0$, то система приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения O.

Если $M_O = 0$ и $R = 0$, то система сил находится в равновесии.

Все случаи, встречающиеся при сложении сил плоской системы, можно представить в виде табл. 3.

Таблица 3

$R \neq 0, \quad M_O \neq 0$	Система приводится к равнодействующей силе $\overline{R}^* = \Sigma \overline{F}_i$, не проходящей через центр приведения O
$R \neq 0, \quad M_O = 0$	Система приводится к равнодействующей $\overline{R} = \Sigma \overline{F}_i$, проходящей через центр приведения O
$R = 0, \quad M_O \neq 0$	Система приводится к одной паре, момент которой равен $\Sigma m_O(\overline{F}_i)$ и не зависит от выбора точки O
$R = 0, \quad M_O = 0$	Система сил находится в равновесии

Равновесие плоской системы сил рассмотрим в следующем параграфе, а теперь перейдем к решению задач на сложение сил плоской системы.

Пример 13

Найти равнодействующую четырех сил, действующих по сторонам правильного шестиугольника, направление которых указано на рис. 31, если $P_1 = P_3 = 2P$ и $P_2 = P_4 = P$.

Решение

Выберем за центр приведения центр O шестиугольника и найдем главный вектор $\overline{R}$ и главный момент M_O данной системы сил относительно центра O.

Так как $\overline{P}_1 = -\overline{P}_3$ и $\overline{P}_2 = \overline{P}_4$, то главный вектор $\overline{R}$ равен $2P_4$, а главный момент

$$M_O = m_O(\overline{P}_1) + m_O(\overline{P}_2) + m_O(\overline{P}_3) + m_O(\overline{P}_4).$$

Для того, чтобы найти момент силы $\overline{P}_1$ относительно точки O, опустим перпендикуляр OA_1 из точки O на линию действия этой силы. Так как сила $\overline{P}_1$ стремится вращать шестиугольник вокруг точки O по часовой стрелке, то

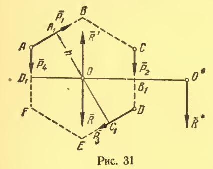


Рис. 31

$$m_O(\overline{P}_1) = -P_1 \cdot OA_1 = -P_1 h,$$

где h — длина апофемы OA_1 правильного шестиугольника. Аналогично вычислим моменты остальных сил относительно точки O:

$$m_O(\overline{P}_2) = -P_2 OB_1 = -P_2 \cdot h,$$

$$m_O(\overline{P}_3) = -P_3 \cdot OC_1 =$$
$$= -P_3 \cdot h \text{ и } m_O(\overline{P}_4) = P_4 \cdot OD_1 = P_4 \cdot h,$$
$$M_O = -P_1 \cdot h - P_2 \cdot h - P_3 \cdot h + P_4 \cdot h =$$
$$= -(P_1 + P_3)\, h = -4Ph,$$

где h — длина апофемы данного правильного шестиугольника.

Итак, данная система сил эквивалентна силе $\overline{R} = 2\overline{P}_4$, приложенной в точке O, и паре с моментом $M_O = +4Ph$. Одну из сил $\overline{R}'$ этой пары выберем равной и противоположно направленной силе $\overline{R}$ и приложенной в точке O. Тогда вторая сила пары $\overline{R}^*$ будет приложена в точке O^*, причем $\overline{OO^*} \perp \overline{R}$.

Так как

$$M_O = m(\overline{R}', \overline{R}^*),$$

то

$$OO^* = \frac{M_O}{R} = \frac{4Ph}{2P} = 2h.$$

Силы $\overline{R}$ и $\overline{R}'$ эквивалентны нулю, а потому данная система сил приводится к одной силе $\overline{R}^*$, которая, следовательно, и есть равнодействующая этой системы сил.

Пример 14

Дана плоская система четырех сил $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$; проекции X и Y этих сил на координатные оси, координаты x, y точек их приложения заданы в табл. 4.

Таблица 4

Проекция	Силы			
	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$	$\bar{P}_3$	$\bar{P}_4$
X	1	−2	3	−4
Y	4	1	−3	−3
x	2	−2	3	−4
y	1	−1	−3	−6

Привести эту систему к началу координат, и затем найти линию действия равнодействующей.

Решение

Найдем проекции главного вектора заданной системы сил на координатные оси по формуле (14):

$$R_x = \Sigma X_i = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$$

$$R_y = \Sigma Y_i = 4 + 1 - 3 - 3 = -1.$$

Откуда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5}.$$

Главный момент M_O находим по формуле (15):

$$M_O = \Sigma m_O(\bar{P}_i) = \Sigma(xY - yX) =$$
$$= 8 - 2 - 9 + 12 - (1 + 2 - 9 + 24) = 9 - 18 = -9.$$

Пусть $A(x, y)$ — точка линии действия искомой равнодействующей $\bar{R}^*$. Тогда

$$m_O(\bar{R}^*) = xR_y^* - yR_x^*,$$

но

$$R_y = R_y^* = -1$$

и

$$R_x = R_x^* = -2,$$

а потому

$$m_O(\bar{R}^*) = -x + 2y = 2y - x.$$

С другой стороны, по теореме Вариньона имеем:

$$m_O(\bar{R}^*) = \Sigma m_O(\bar{P}_i) = -9.$$

Следовательно,

$$2y - x = 9,$$

или

$$x - 2y + 9 = 0.$$

Это и есть уравнение линии действия равнодействующей.

§ 3. Равновесие рычага

Рычагом называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием сил, лежащих в одной плоскости, перпендикулярной к этой оси. Точка пересечения плоскости, в которой лежат все силы, приложенные к рычагу, с осью вращения называется *точкой опоры рычага*.

Условием равновесия рычага является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех приложенных к нему сил относительно точки O опоры рычага, т. е.

$$\Sigma m_O(\bar{F}_i) = 0. \tag{18}$$

Задачи этого параграфа можно разделить на следующие две группы:

1) задачи, относящиеся к равновесию рычага;

2) задачи, относящиеся к равновесию твердого тела при возможном его опрокидывании.

Первая группа

Равновесие рычага

(задачи 81 — 84, 112, 113)

Пример 15

Буровая штанга весом $Q = 2\,m$ укреплена при помощи каната BCD, перекинутого через шкив C и навернутого на барабан лебедки D диаметром 25 *см*. С барабаном жестко соединен рычаг OE длиной 180 *см* и весом $G = 100\,кГ$, на конце которого укреплен противовес E.

Найти вес P этого противовеса (рис. 32).

Рис. 32

Решение

Так как натяжение каната во всех его точках одинаково, то реакция каната T, приложенная к барабану лебедки, равна весу штанги Q.

Рычаг OE с неподвижной точкой O находится в равновесии, поэтому алгебраическая сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно этой точки O равна нулю, т. е.

$$\Sigma m_O(\bar{F}_i) = 0,$$

или

$$-P\cdot OE - G\cdot\frac{OE}{2} + T\cdot r = 0,$$

откуда

$$P = -G\frac{OE}{2OE} + T\cdot\frac{r}{OE} = -\frac{G}{2} + T\cdot\frac{r}{OE},$$

или

$$P = -50 + \frac{2\,000\cdot 25}{2\cdot 180} = \frac{800}{9} = 88{,}8\ m.$$

Пример 16

Клинчатым тормозом, изображенным на рис. 33, снабжаются рудничные вагончики. Определить силу, с которой прижимается тормозная колодка к колесам, если угол, под которым обработана колодка, равен α, $OB = b$, $OA = a$ и к рычагу AB в точке A приложена тормозящая сила $\overline{P}$, перпендикулярная AB (рис. 33).

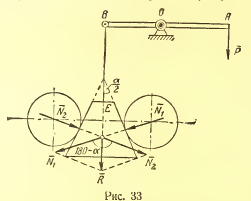


Рис. 33

Решение

Так как клинчатый тормоз симметричен относительно вертикальной оси BE и силы $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, с которыми колеса давят на клин, направлены под одинаковыми углами к вертикали, то эти силы по величине равны; их равнодействующая $\overline{R}$ направлена по вертикали и по величине равна

$$R = 2N_1\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2N_1\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, рычаг AB находится в равновесии под действием двух параллельных сил $\overline{P}$ и $\overline{R}$, а потому алгебраическая сумма моментов этих сил относительно точки O опоры равна нулю, т. е.

$$m_O(\overline{P}) + m_O(\overline{R}) = 0,$$

но

$$m_O(\overline{P}) = -P\cdot OA,$$

а

$$m_O(\bar{R}) = R \cdot OB = 2N_1 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot OB.$$

Подставив эти значения в предыдущее уравнение, получим:

$$-P \cdot OA + 2N_1 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot OB = 0,$$

откуда

$$N_1 = P \cdot \frac{OA}{2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot OB} = P \frac{a}{2b \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Вторая группа

Равновесие тела, которое может опрокидываться (задачи 94—97)

Пример 17

Подъемный кран весом $Q = 20\,т$ имеет вылет $l = 5\,м$, ширина его основания $AB = a = 4\,м$. Вес противовеса, имеющего форму куба с ребром $b = 2\,м$, равен $P = 5\,т$. Центр тяжести крана на-

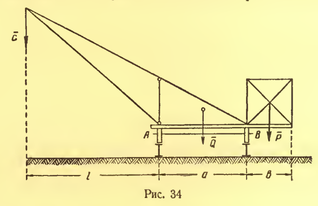


Рис. 34

ходится на перпендикуляре к середине расстояния AB. Найти наибольший вес G груза, поднимаемого краном без опрокидывания вокруг точки A (рис. 34).

Решение

Так как колесо B в начальный момент опрокидывания отделяется от опорной плоскости и все давление переносится на опору A, то реакция опоры B становится в этот момент равной нулю, и мы имеем, следовательно, тело с одной неподвижной

опорой A, вокруг которой оно может вращаться. Применяя поэтому условие равновесия рычага, получим:

$$m_A(\overline{G}) + m_A(\overline{Q}) + m_A(\overline{P}) = 0,$$

или

$$G \cdot l - Q \cdot \frac{a}{2} - P \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right) = 0,$$

откуда

$$G = \frac{P\left(\frac{b}{2} + a\right) + Q \cdot \frac{a}{2}}{l} = \frac{5 \cdot 5 + 20 \cdot 2}{5} = 13\, m.$$

§ 4. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил

Для равновесия плоской системы сил, приложенных к твердому телу и не пересекающихся в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}$ этих сил и их главный момент M_O относительно произвольной точки O, лежащей в плоскости действия этих сил, были равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \overline{F}_i = 0, \\ \Sigma m_O(\overline{F}_i) = 0. \end{array}\right\} \qquad (19)$$

В координатной форме эти условия выражаются следующими тремя уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_{ix} = 0, \\ \Sigma F_{iy} = 0, \\ \Sigma m_0(\overline{F}_i) = 0. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Условия равновесия плоской системы сил, расположенных как угодно на плоскости, можно выразить еще в двух других видах.

1. Алгебраическая сумма моментов сил относительно трех произвольных точек A, B, C, *не лежащих на одной прямой*, равна нулю, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma m_A(\overline{F}_i) = 0, \\ \Sigma m_B(\overline{F}_i) = 0, \\ \Sigma m_C(\overline{F}_i) = 0. \end{array}\right\} \qquad (21)$$

2. Алгебраическая сумма моментов всех сил *относительно* двух произвольных точек A и B равна нулю, и сумма проекций этих сил на какую-либо ось, не перпендикулярную прямой, соединяющей точки A и B, равна нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m_A(\overline{F}_i)=0, \\ \Sigma m_B(\overline{F}_i)=0, \\ \Sigma F_{ix}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

В частном случае, если все силы плоской системы параллельны, то условия равновесия (20) таких сил выражаются не тремя, а двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_{ix}=0, \\ \Sigma m_0(\overline{F}_i)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

причем ось Ox параллельна данным силам.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил можно выразить и в другой форме.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma mom_A(\overline{F}_i)=0, \\ \Sigma mom_B(\overline{F}_i)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

причем *прямая AB не параллельна данным силам.*

Задачи на равновесие плоской системы сил можно разбить на два основных типа, а именно:

1) задачи на равновесие плоской системы параллельных сил;

2) задачи на равновесие плоской системы сил, расположенных как угодно.

Задачи второго типа можно еще классифицировать по характеру связей, наложенных на рассматриваемое тело, и подразделить их на следующие две группы:

а) задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны;

б) задачи, в которых линия действия реакций одной из связей неизвестна.

Общие указания, сделанные в § 6 главы I о направлении реакций связей и решении задач на равновесие несвободного твердого тела, остаются такими же и при решении задач этого параграфа.

Чтобы задача была статически определима, число неизвестных реакций должно быть не больше *трех*, так как при равновесии твердого тела под действием плоской системы сил в общем случае можно составить *три* уравнения равновесия [уравнения (20) или (21), или (22)].

При составлении уравнений равновесия за центр моментов следует выбирать такую точку, через которую проходят линии действия двух неизвестных сил; тогда в уравнение моментов относительно этой точки войдет только одна неизвестная сила, и ее легко будет определить из этого уравнения.

Если данное тело находится в равновесии под действием плоской системы *параллельных сил,* то число неизвестных реакций не должно быть *больше двух,* так как в этом случае мы имеем только *два* уравнения равновесия [уравнения (23) или (24)].

ЗАДАЧИ ТИПА I

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

(задачи 89—91)

Пример 18

Однородная балка AB длиной в $1{,}5\,м$ и весом $P=80\,кГ$ заложена между двумя опорами C и D. К концу B балки подвешен груз весом $Q=200\,кГ$; кроме того на балку действует пара $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ с моментом $M=100\,кГм$; размеры указаны на рис. 35. Найти реакции опор.

Рис. 35

Решение

Как видно из рисунка, силы, приложенные к балке, стремятся повернуть ее так, что давление балки на опору C направлено вверх, поэтому реакция $\overline{R_C}$ опоры C направлена по вертикали вниз; давление же балки на опору D направлено по вертикали вниз, поэтому реакция $\overline{R_D}$ опоры D направлена по вертикали вверх. Балка AB находится в равновесии под действием параллельных сил $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R_C}$, $\overline{R_D}$, $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, причем $\overline{F_1}=-\overline{F_2}$.

Приравняв нулю алгебраическую сумму этих сил и сумму их моментов относительно точки C, получим два уравнения равновесия для определения двух искомых реакций $\overline{R}_C$ и $\overline{R}_D$.

При составлении этих уравнений необходимо учесть, что сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от положения этой точки и равна моменту этой пары, поэтому

$$m_C(\overline{F}_1)+m_C(\overline{F}_2)=m(\overline{F}_1, \overline{F}_2)=-100\,кГм=-10\,000\,кГсм$$

(этот момент берем со знаком минус потому, что пара стремится повернуть балку по часовой стрелке).

Алгебраическая сумма сил пары равна нулю, следовательно, будем иметь:

1) $R_D-P-Q-R_C=0$,

2) $m_C(\overline{R}_D)+m_C(\overline{P})+m_C(\overline{Q})+m(\overline{F}_1, \overline{F}_2)=0$.

Найдем теперь моменты сил $\overline{R}_D$, $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ относительно точки C:

$$m_C(\overline{P})=-P\cdot CE=-P(AE-AC)=-50P=-50\cdot 80\,кГсм,$$

$$m_C(\overline{Q})=-QCB=-Q(AB-AC)=-125Q=-125\cdot 200\,кГсм,$$

$$m_C(\overline{R}_D)=R_D\cdot CD=30R_D.$$

Подставив найденные значения моментов в уравнение (2), по-

лучим:

$$30R_D - 50\cdot 80 - 125\cdot 200 - 10\,000 = 0,$$

откуда

$$R_D = \frac{4\,000 + 25\,000 + 10\,000}{30} = \frac{3\,900}{3} = 1\,300\,кГ.$$

Подставив это значение R_D в первое уравнение, находим:

$$R_C = R_D - P - Q = 1\,020\,кГ.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Первая группа

Задачи, в которых линии действия реакций всех связей известны
(задачи 118—125)

Пример 19

Ферма $ACDB$ в точке D опирается на катки, а в точках A и B поддерживается наклонными стержнями AE и BF, шарнирно укрепленными в точках E и F. Раскосы фермы и прямая EF

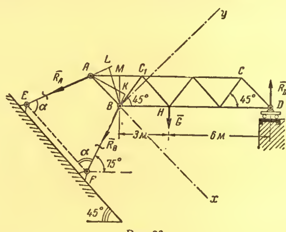


Рис. 36

наклонены к горизонту под углами в 45°; $AE = BF$, $\angle AEF = 60°$. Вес фермы $G = 7{,}5\,т$. Размеры указаны на рис. 36.

Найти реакции опоры D и стержней AE и BF.

Решение

Реакция $\overline{R}_D$ направлена перпендикулярно к опорной плоскости катков, а реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ стержней AE и BF направлены вдоль

этих стержней, так как стержни соединены с фермой и с опорами шарнирно. Ферма находится в равновесии под действием плоской системы непараллельных сил ($\overline{G}$, $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$, $\overline{R}_D$), поэтому можно составить три уравнения равновесия. Приравняем нулю сумму моментов всех сил, приложенных к ферме, относительно двух точек и сумму проекций этих сил на ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей эти точки. За центры моментов следует выбрать две такие точки, через которые проходят неизвестные реакции. Тогда уравнения равновесия будут проще. В данной задаче за центры моментов возьмем точки A и B, а ось x направим по прямой AB.

Вычисления моментов всех сил относительно точек A и B и проекций этих сил на ось x расположим в табл. 5.

Составим три уравнения равновесия, приравняв нулю сумму проекций всех сил на ось x и сумму моментов этих сил относительно точек A и B:

$$\left.\begin{aligned} G\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-R_A\cdot\frac{1}{2}+R_B\cdot\frac{1}{2}-R_D\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\\ -3G+3\frac{\sqrt{6}}{4}R_A+9R_D=0,\\ -4{,}5G-\frac{3\sqrt{6}}{4}R_B+10{,}5R_D=0,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} -R_A+R_B-\sqrt{2}R_D=-\sqrt{2}G,\\ \frac{\sqrt{6}}{4}R_A+3R_D=G,\\ -\frac{\sqrt{6}}{4}R_B+3{,}5R_D=1{,}5G.\end{aligned}\right\}$$

Для решения этой системы уравнений исключим из них сначала неизвестные R_A и R_B. Для этого умножим первое уравнение на $\frac{\sqrt{6}}{4}$ и затем все три уравнения сложим, тогда получим:

$$\left(6{,}5-\frac{\sqrt{12}}{4}\right)R_D=\left(2{,}5-\frac{\sqrt{12}}{4}\right)G,$$

или

$$(13-\sqrt{3})R_D=(5-\sqrt{3})G,$$

откуда

$$R_D=\frac{5-\sqrt{3}}{13-\sqrt{3}}G=12{,}7\,m.$$

Теперь из второго и третьего уравнений равновесия находим:

$$\frac{\sqrt{6}}{4}R_A=G-3R_D=G\left(1-\frac{15-3\sqrt{3}}{13-\sqrt{3}}\right)=G\left(\frac{\sqrt{3}-1}{13-\sqrt{3}}\right)\cdot 2;$$

Таблица 5

Сила	X	Плечо силы относительно точки B	Знак момента относительно точки B	m_B	Плечо силы относительно точки A	Знак момента относительно точки A	m_A
$\overline{G}$	$G\cdot\cos 45^\circ = G\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$	$BH=3$	$-$	$-3G$	$AM+BH=\frac{AC_1}{2}+BH=1,5+3=4,5$	$-$	$-4,5G$
$\overline{R}_A$	$-R_A\cdot\cos 60^\circ = -\frac{R_A}{2}.$	$BL=BA\cdot\cos 30^\circ = AC_1\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\frac{\sqrt{6}}{4}$	$+$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}R_A$	0		0
$\overline{R}_B$	$R_B\cdot\cos 60^\circ = \frac{R_B}{2}.$	0		0	$AK=AB\cdot\cos 30^\circ = AC_1\cdot\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}.$	$-$	$\frac{-3\sqrt{6}}{4}R_B$
$\overline{R}_D$	$-R_D\cdot\cos 45^\circ = -R_D\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$	$BD=9$	$+$	$9R_D$	$AM+BD=1,5+9=10,5$	$+$	$10,5R_D$

и

$$\frac{\sqrt{6}}{4}R_B = 3{,}5R_D - 1{,}5G = \frac{1}{2}(7R_D - 3G) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{35 - 7\sqrt{3}}{13 - \sqrt{3}} - 3\right)\cdot G = -\frac{2(\sqrt{3}+1)}{13-\sqrt{3}}\,G,$$

откуда

$$R_A = \frac{8(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}(13-\sqrt{3})}\cdot G = \frac{4\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{13-\sqrt{3}}\right)\cdot G = 1{,}57\ m,$$
$$R_B = -\frac{8(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(13-\sqrt{3})}\,G = -\frac{4\sqrt{6}}{3}\,\frac{(\sqrt{3}+1)}{(13-\sqrt{3})}\,G = -5{,}2\ m.$$

Знак минус, полученный для значения силы $\overline{R}_B$, указывает, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рисунке, и, следовательно, стержень BF не растянут, а сжат.

Эту же задачу можно решить другим способом, если составить три уравнения равновесия в другой форме, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на координатные оси x и y и сумму моментов этих сил относительно точки B, причем ось x как и прежде направлена по AB.

Пример 20

Часть мостовой фермы подвешена на трех канатах, расположенных, как указано на рис. 37. Вес этой части фермы равен $G = 4\,200\ к\Gamma$ и приложен в точке D. Размеры указаны на ри-

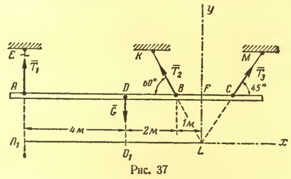


Рис. 37

сунке. Найти натяжения канатов, если прямая AC горизонтальна.

Решение

Силы реакции канатов AE, BK и CM направлены вдоль этих канатов и приложены соответственно в точках A, B и C. Обозначим эти силы $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и $\overline{T}_3$.

Ось Ox направим параллельно AB, а ось Oy — перпендикулярно к AB. Начало координат выберем в точке пересечения L двух неизвестных сил $\overline{T}_2$ и $\overline{T}_3$. Спроектируем все силы, приложенные к рассматриваемой части фермы, на координатные оси и найдем моменты этих сил относительно начала координат L.

Моменты сил $\overline{T}_2$ и $\overline{T}_3$ относительно точки L будут равны нулю, и в уравнение моментов войдет только одна неизвестная сила T_1, которую легко определить из этого уравнения.

Приравняв нулю сумму проекций всех сил на каждую координатную ось и сумму моментов этих сил относительно точки L, получим три уравнения равновесия:

$$1)\ T_3 \cos 45° - T_2 \cos 60° = 0,$$

$$2)\ T_1 + T_2 \cos 30° + T_3 \cos 45° - G = 0,$$

$$3)\ -T_1 A_1 L + G \cdot LD_1 = 0.$$

Из третьего уравнения находим:

$$T_1 = \frac{3}{7} G = 1\,800 \ кГ.$$

Из первого уравнения выразим T_2 через T_3:

$$T_2 = \frac{T_3 \cos 45°}{\cos 60°} = T_3 \sqrt{2}.$$

Второе уравнение теперь перепишем так:

$$G \cdot \frac{3}{7} + T_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} + T_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - G = 0,$$

откуда

$$T_3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{G \cdot 2}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{4\sqrt{2}}{7(\sqrt{3}+1)} G = \frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{7} \cdot G,$$

или

$$T_3 \approx 1235{,}1 \ кГ.$$

Теперь находим силу T_2:

$$T_2 = T_3 \sqrt{2} = \frac{4}{7}(\sqrt{3}-1) \cdot G \approx 1752 \ кГ.$$

Вторая группа

Задачи, в которых линия действия реакции одной из связей неизвестна

(задачи 129—135)

Пример 21

Однородный брус $AB = l = 27$ *дм*, весом $Q = 10$ *кГ*, опирается на гладкую цилиндрическую поверхность радиусом $r = 6$ *дм* промежуточной точкой D, причем один конец его A закреплен шарнирно, а к другому концу подвешен груз весом $P = 5$ *кГ*.

Определить опорные реакции, если $\angle DAO = 60°$ (рис. 38).

Решение

Реакция $\overline{N}$ гладкой цилиндрической поверхности направлена по нормали к этой поверхности, т. е. по радиусу OD.

Величина и направление реакции $\overline{R}_A$ неподвижного шарнира A неизвестны. Поэтому разложим силу $\overline{R}_A$ на две составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, направленные по двум координатным осям x и y, и найдем эти неизвестные составляющие, причем оси координат выберем, как указано на рисунке. После того, как составляющие X_A и Y_A будут найдены, легко будет определить величину и направление полной реакции $\overline{R}_A$. Брус AB находится в равновесии под действием сил $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{N}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$, поэтому составим три уравнения равновесия, вычислив предварительно проекции этих сил на координатные оси и их моменты относительно начала координат.

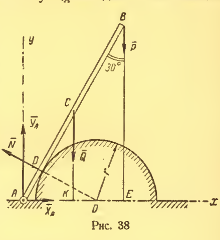


Рис. 38

Приравняв нулю сумму проекций всех сил на каждую координатную ось и сумму моментов этих сил относительно точки A, получим три уравнения равновесия:

$$1)\ X_A - N\cos 30° = 0,$$

$$2)\ Y_A + N\cos 60° - P - Q = 0,$$

$$3)\ -P\cdot l\cos 60° - Q\frac{l}{2}\cos 60° + N\cdot AD = 0.$$

Из треугольника OAD имеем:

$$AD = OD\cdot \operatorname{tg} 30° = r\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Из третьего уравнения находим:

$$N = \frac{\left(P\frac{l}{2} + Q\frac{l}{4}\right)\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{l}{r}\left(P + \frac{Q}{2}\right) = 38{,}9\ \kappa\Gamma.$$

Подставляя значение N в первое и второе уравнения, найдем X_A и Y_A:

$$X_A = N\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{l}{r}\left(P + \frac{Q}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} \frac{l}{r} (2P + Q) = 33{,}7 \;\; кГ.$$

$$Y_A = P + Q - N \cos 60° = P + Q - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{l}{r} \left(P + \frac{Q}{2} \right) =$$

$$= -4{,}5 \;\; кГ, \quad R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \approx 33{,}9 \;\; кГ.$$

Пример 22

Однородный стержень AB весом $Q = 20$ *кГ* в точке A закреплен шарнирно, а в точке C свободно опирается на опору C. На стержень AB действует пара с моментом $M = 5$ *кГм*, а к концу его B привязана веревка, перекинутая через блок D, на конце которой висит груз весом $P = 5\sqrt{2}$ *кГ*. Определить реакции шарнира A и опоры C, если $AC = 2 \cdot BC = 40$ *см*, а $\angle ABL = 45°$ (рис. 39).

Рис. 39

Решение

Реакция $\overline{R_C}$ опоры C направлена перпендикулярно к стержню AB. Направление реакции $\overline{R_A}$ шарнира A неизвестно; поэтому разлагаем эту реакцию на две составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, направленные по осям координат, причем ось Ax направлена вдоль стержня AB, а ось Ay — перпендикулярна к нему. Реакция веревки BD приложена к стержню в точке B и направлена вдоль веревки. Так как натяжение веревки BLK во всех ее точках одинаково, то реакция веревки $\overline{T}$ равна по величине весу груза P, т. е. $T = P$.

Составим три уравнения равновесия, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на координатные оси и сумму моментов этих сил относительно начала координат:

1) $X_A - T \cos 45° = 0$,
2) $Y_A + R_C - Q - T \cos 45° = 0$,
3) $R_C \cdot AC - T \cdot AB \cos 45° - Q \cdot AE - M = 0$.

Из первого уравнения находим:

$$X_A = T \cos 45° = P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \;\; кГ.$$

Из уравнения (3), в котором

$$AC = 40, \quad AB = AC + CB = 60,$$

и

$$AE = \frac{AB}{2} = 30,$$

находим:

$$R_C = \frac{60T\cos 45^\circ + 30Q + M}{40} = \frac{3}{4}\sqrt{2}P + \frac{3}{4}Q + \frac{M}{40} = 35\ кГ.$$

Подставив значение R_C во второе уравнение, получим:

$$Y_A = Q + P\cos 45^\circ - R_C = Q + P\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}P - \frac{3}{4}Q - \frac{M}{40},$$

или

$$Y_A = \frac{Q}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}P - \frac{M}{40} = -10\ кГ.$$

Пример 23

Ось AB подъемного крана, вес которого $P = 1\,500\ кГ$, может вращаться в подпятнике B и в подшипнике A. К крану в точке C подвешен груз весом $Q = 800\ кГ$. Определить реакции опор A и B. Размеры заданы на рис. 40.

Решение

В данном случае все силы, приложенные к крану, лежат в одной плоскости с осью вращения. Реакция $\overline{N}$ подшипника направлена перпендикулярно к оси вращения крана AB, а реакция подпятника разлагается на две составляющие: вертикальную составляющую $\overline{Y_A}$ (так как подпятник препятствует перемещению крана по вертикали вниз) и горизонтальную составляющую $\overline{X_A}$ (реакцию стенок подпятника, так как стенки подпятника препятствуют перемещению крана в горизонтальном направлении).

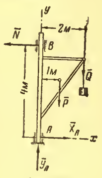


Рис. 40

Оси координат выберем, как указано на рисунке. Приравняв нулю сумму проекций на координатные оси всех сил, приложенных к крану ($\overline{X_A}$, $\overline{Y_A}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$), и сумму моментов этих сил относительно точки A, получим три уравнения равновесия:

1) $X_A - N = 0.$
2) $Y_A - P - Q = 0.$
3) $-P\cdot 1 - Q\cdot 2 + N\cdot 4 = 0.$

Из третьего уравнения находим:

$$N = \frac{P + 2Q}{4} = \frac{1\,500 + 1\,600}{4} = \frac{3\,100}{4} = 775\ кГ.$$

Подставив значение N в первое и второе уравнения, найдем X_A и Y_A:

$$X_A = N = 775\ кГ.$$
$$Y_A = P + Q = 3\,100\ кГ.$$

Примечание. Уравнения равновесия можно было составлять и в другой форме, приравнивая нулю сумму моментов всех сил, приложенных к крану относительно двух точек A и B, и сумму проекций этих сил на ось y. Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{c} -Q\cdot 2 - P\cdot 1 + X_A\cdot 4 = 0, \\ -Q\cdot 2 - P\cdot 1 + 4N = 0, \\ Y_A - P - Q = 0, \end{array}\right\}$$

откуда находим:

$$X_A = \frac{2Q+P}{4} = 775\ кГ,$$
$$Y_A = P + Q = 3\,100\ кГ$$

и

$$N = \frac{2Q+P}{4} = 775\ кГ.$$

§ 5. Равновесие системы, состоящей из нескольких твердых тел

В случае системы твердых тел, соединенных между собой силы, приложенные к каждому телу этой системы, можно подразделить на две группы:

1) внешние силы,
2) внутренние силы.

Черт. 41

Внутренними силами называются силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему. По закону равенства действия и противодействия внутренние силы всегда попарно равны по величине и прямо противоположны по направлению, но приложены к двум разным взаимодействующим между собой телам системы.

Внешними силами называются те силы, с которыми тела, не входящие в данную систему, действуют на тела этой системы.

Рассмотрим, например, систему изображенную на рис. 41. Балка AB весом P_1 может вращаться вокруг оси A неподвижного цилиндрического шарнира и концом B опирается свободно на другую балку CD весом P_2, которая подперта в точке E и соединена со стеной шарниром D.

В данном случае система состоит из двух тел: балки AB и балки CD.

Внутренними силами для данной системы являются силы взаимодействия между балками, т. е. сила $\overline{N}_1$ давления балки AB

на балку CD и сила $\overline{N}_2$, с которой балка CD действует на балку AB. По закону равенства действия и противодействия силы $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ равны по величине и противоположны по направлению, т. е. $\overline{N}_1 = -\overline{N}_2$.

Веса $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ балок представляют собой силы, с которыми эти балки притягиваются к Земле, и следовательно, для данной системы являются силами внешними, так как Земля по отношению к этой системе есть внешнее тело. Точно так же реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_D$ шарнирных опор A и D и реакция $\overline{R}_E$ опоры E являются для данной системы внешними силами, так как шарнирные опоры A и D и опора E не принадлежат к рассматриваемой системе, состоящей только из двух балок.

При решении задач на равновесие системы тел необходимо учесть, что все внешние и внутренние силы, приложенные *к каждому телу* в отдельности, уравновешиваются. Следовательно, в случае плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия для каждого из этих тел в отдельности.

Таким образом, для системы, состоящей из n тел, можно составить всего $3n$ уравнений равновесия. Поэтому если число неизвестных сил в данной задаче не более $3n$, то такая задача является статически определенной. Если же число неизвестных в задаче окажется больше $3n$, то такая задача не может быть разрешена только на основании уравнений статики абсолютно твердого тела и потому является статически неопределенной.

Так как внутренние силы попарно равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны, то алгебраическая сумма их моментов относительно любой точки равна нулю и сумма их проекций на любую ось также равна нулю. Поэтому, если составим уравнение равновесия (уравнение моментов относительно какой-либо точки, или уравнение проекций на какую-либо ось) для каждого тела в отдельности и затем все эти уравнения сложим, то в полученном уравнении члены, содержащие внутренние силы, попарно уничтожаются и, следовательно, в это уравнение будут входить т о л ь к о внешние силы.

Таким образом, если система тел находится в равновесии, то внешние силы, приложенные к этой системе, удовлетворяют тем же трем уравнениям равновесия, что и в случае равновесия одного абсолютно твердого тела. Эти уравнения представляют собой условия равновесия внешних сил, действующих на систему.

Из этих уравнений можно найти все *внешние реакции,* если число этих внешних реакций *не больше трех.* Если же число внешних реакций окажется больше трех или если в задаче, кроме внешних реакций, требуется найти неизвестные *внутренние силы*, то необходимо применять метод *расчленения системы* т. е. нужно рассматривать равновесие каждого тела системы,

в отдельности и для каждого из этих тел составлять уравнения равновесия, учитывая при этом *все силы*, приложенные к рассматриваемому телу. Если система состоит, например, из двух твердых тел, то, применяя метод расчленения, получим в общем случае всего шесть уравнений равновесия (по три уравнения для каждого тела). Для составления шести уравнений равновесия можно применять еще и другой прием, а именно: составить сначала три уравнения для всей системы в целом (как для одного абсолютно твердого тела) и затем к этим трем уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только *для одного* из двух тел данной системы. Этот второй прием нередко предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят *только внешние силы* и потому эти уравнения обычно оказываются проще.

Задачи, относящиеся к равновесию системы твердых тел, в зависимости от вида соединения этих тел между собой можно разделить на следующие три типа.

1. Тела, входящие в систему, опираются свободно друг на друга.

2. Тела, входящие в систему, соединены между собой гибкой нитью или невесомым стержнем, концы которого прикреплены к этим телам при помощи шарниров.

3. Тела, входящие в систему, соединены между собой при помощи шарнира.

ЗАДАЧИ ТИПА I

ТЕЛА, ВХОДЯЩИЕ В СИСТЕМУ, ОПИРАЮТСЯ СВОБОДНО ДРУГ НА ДРУГА

(задачи 109, 164, 166—168)

В задачах этого типа внутренние силы, т. е. силы давления этих тел друг на друга, направлены по общей нормали к поверхностям этих тел в точке их касания или по нормали к поверхности одного из этих тел в точке соприкосновения его с другим телом.

Пример 24

Горизонтальная балка AB длиной 6 *м* и весом $P_1 = 800$ *кГ* может вращаться вокруг неподвижного шарнира A и опирается свободно в точке C на подпорную балку CD длиной 5 *м* и весом $P_2 = 600$ *кГ*.

Балка CD соединена со стеной шарниром D и удерживается в равновесии горизонтальной веревкой EF. Найти реакции шарниров A и D и силу T натяжения веревки EF, а также давление балки AB на балку CD, если балка CD составляет с вер-

тикалью угол $\alpha = 30°$, шарниры A и D лежат на одной вертикали и $DE = 4$ *м* (рис. 42).

Решение

Данная система состоит из двух тел: балки AB и балки CD; так как балка AB опирается свободно на конец балки CD, то реакция $\overline{R}_C$ балки CD, приложенная в точке C к балке AB, направлена перпендикулярно к AB, т. е. вертикально вверх. По закону равенства действия и противодействия реакция $\overline{R}'_C$ балки AB, приложенная к балке CD в той же точке C, направлена по вертикали вниз и по величине равна силе R_C, т. е. $\overline{R}'_C = -\overline{R}_C$.

Реакция $\overline{T}$ веревки EF направлена вдоль этой веревки и приложена к балке CD в точке E. Направление реакции $\overline{R}_D$ неподвижного шарнира D неизвестно, а потому разложим эту реакцию на горизонтальную и вертикальную составляющие X_D и Y_D.

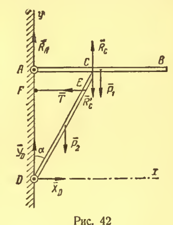


Рис. 42

Неизвестную реакцию шарнира A обозначим $\overline{R}_A$; тогда балка AB находится в равновесии под действием трех сил $\overline{R}_A$, $\overline{R}_C$ и $\overline{P}_1$, причем силы $\overline{R}_C$ и $\overline{P}_1$ параллельны (вертикальны); отсюда следует, что сила $\overline{R}_A$ параллельна этим силам ($\overline{R}_C$ и $\overline{P}_1$), т. е. вертикальна. Таким образом, в данной задаче число неизвестных сил равно пяти (R_A, R_C, X_D, Y_D, T), а число независимых уравнений, которые можно составить, также равно пяти (два уравнения равновесия для балки AB и три уравнения для балки CD). Следовательно, задача статически определима.

Напишем два уравнения равновесия трех параллельных сил $\overline{P}_1$, $\overline{R}_C$ и $\overline{R}_A$, приложенных к балке AB, для чего приравняем нулю алгебраическую сумму проекций этих сил на ось y и алгебраическую сумму их моментов относительно точки A:

$$1)\ R_A + R_C - P_1 = 0,$$

$$2)\ R_C \cdot AC - P_1 \cdot \frac{AB}{2} = 0.$$

Но

$$AC = CD \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \sin 30° = \frac{5}{2}$$

(из треугольника ACD), а потому эти уравнения принимают вид

$$R_A + R_C = P_1 = 800,$$

$$\frac{5}{2}R_C = 800\cdot 3 = 2400;$$

отсюда:

$$R_C = \frac{2400\cdot 2}{5} = 960 \text{ кГ}$$

и

$$R_A = 800 - R_C = -160 \text{ кГ}.$$

Отрицательное значение проекции силы R_A указывает на то, что эта сила имеет направление, противоположное указанному на рисунке, т. е. эта сила направлена по вертикали вниз.

Далее составим три уравнения равновесия для балки DC. Для этого приравняем нулю сумму проекций на координатные оси x и y всех сил, приложенных к этой балке, и сумму моментов этих сил относительно точки D.

Тогда будем иметь:

$$3)\ X_D - T = 0,$$

$$4)\ Y_D - R'_C - P_2 = 0,$$

$$5)\ -P_2\cdot\frac{AC}{2} - R'_C\cdot AC + T\cdot DF = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &X_D - T = 0,\\ &-R'_C + Y_D = P_2,\\ &-P_2\cdot\frac{5}{4} - R'_C\cdot\frac{5}{2} + T\cdot 4\cos 30^\circ = 0, \end{aligned}\right\}$$

так как

$$R'_C = R_C = 960 \text{ кГ},$$

то из третьего уравнения находим

$$T = \frac{\frac{5}{4}\cdot 600 + 5\cdot 480}{2\sqrt{3}} = 525\cdot\sqrt{3} \approx 908{,}25 \text{ кГ}.$$

Из второго уравнения находим

$$Y_D = P_2 + R'_C = 600 + 960 = 1560 \text{ кГ}.$$

Из первого уравнения имеем

$$X_D = T = 525\sqrt{3} \approx 908{,}25 \text{ кГ}.$$

ТЕЛА, ВХОДЯЩИЕ В СИСТЕМУ, СОЕДИНЕНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ГИБКОЙ НИТЬЮ, ИЛИ НЕВЕСОМЫМ СТЕРЖНЕМ, КОНЦЫ КОТОРОГО ПРИКРЕПЛЕНЫ К ЭТИМ ТЕЛАМ ПРИ ПОМОЩИ ШАРНИРОВ

(задачи 108, 162, 163)

В задачах этого типа реакции нити или стержня, направленные вдоль этой нити или вдоль этого стержня, являются внутренними силами.

Пример 25

Определить, с какой силой барабан *I*, соединенный с рычагом *DE*, закрепленным на шарнире *E*, давит на барабан *II*, если к концу *B* рычага *AB*, закрепленного на шарнире *A*, подвешен груз весом $P = 25$ *кГ*. Размеры указаны на рис. 43.

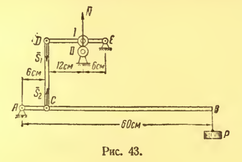


Рис. 43.

Решение

В данной задаче мы имеем два рычага: *AB* и *DE*, соединенных между собой стержнем *DC*, концы которого соединены с рычагами *AB* и *DE* шарнирами *C* и *D*.

Реакция $\bar{S}_1$ стержня *CD*, приложенная в точке *D* к рычагу *DE*, направлена вдоль *CD*, так же как и реакция $\bar{S}_2$ стержня *CD*, приложенная к рычагу *AB* в точке *C*, причем $\bar{S}_2 = -\bar{S}_1$.

Так как рычаг *AB* с неподвижной опорой *A* находится в равновесии под действием сил $\bar{P}$ и $\bar{S}_2$, то

$$m_A(\bar{P}) + m_A(\bar{S}_2) = 0,$$

или

$$S_2 \cdot 6 - P \cdot 60 = 0,$$

откуда

$$S_2 = 10P = 250 \text{ кГ}.$$

Далее рассмотрим равновесие рычага DE с неподвижной опорой E, к которому приложены сила $\overline{S}_1$ и реакция $\overline{N}$ барабана II.

Так как рычаг ED опирается свободно на барабан II, то реакция $\overline{N}$ этого барабана направлена по нормали к его поверхности, т. е. по вертикали вверх. Из условия равновесия рычага DE имеем:

$$m_E(\overline{N}) + m_E(\overline{S}_1) = 0,$$

или

$$-N \cdot 6 + S_1 \cdot 18 = 0,$$

откуда

$$N = \frac{S_1 \cdot 18}{6} = 3S_1 = 3S_2 = 3 \cdot 10P = 30P = 750 \text{ } кГ.$$

Давление барабана I на барабан II равно по величине и противоположно по направлению реакции $\overline{N}$.

ЗАДАЧИ ТИПА III

ТЕЛА, ВХОДЯЩИЕ В СИСТЕМУ, СОЕДИНЕНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ШАРНИРНО

(задачи 110 — 112, 143, 147 — 154)

В этом случае внутренняя сила т. е. сила, с которой одно тело действует на другое, приложена в центре шарнира, но направление ее неизвестно.

Поэтому при решении таких задач эту силу разлагают на две составляющие, направленные по координатным осям. Из задач этой группы следует особо отметить важный частный случай, а именно: система состоит из двух тел с тремя шарнирами, из которых два являются неподвижными опорными шарнирами, а третий соединяет эти два тела между собой, например, в случае трехшарнирной арки (рис. 44).

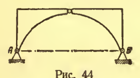


Рис. 44

Если трехшарнирная арка находится в равновесии под действием плоской системы сил, то можно составить всего шесть уравнений равновесия (по три уравнения для каждой части AC и BC арки в отдельности).

Так как направление реакции в каждом из трех шарниров A, B и C неизвестно, то при решении задачи о равновесии трехшарнирной арки каждую из этих реакций нужно разложить на две составляющие (по координатным осям x и y). Следовательно, всего будем иметь шесть неизвестных реакций, которые можно найти из шести уравнений равновесия. Таким образом, задача о равновесии трехшарнирной арки является статически определимой.

Пример 26

На рис. 45 показана схема копра, состоящего из двух одинаковых ферм, соединенных между собой шарниром B. Веса этих ферм Q_1 и Q_2 равны и приложены в точках D и E.

На левую ферму действует горизонтальная сила $\overline{P}$ давления ветра. Определить реакции в шарнирах A, B, C при указанных на рисунке размерах.

Решение

Направления реакций в шарнирах A, B, C неизвестны, а потому разложим каждую из них на горизонтальную и вертикаль-

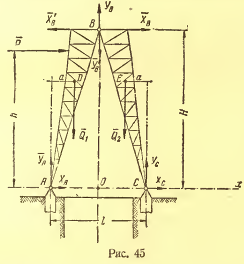


Рис. 45

ную составляющие, направив их, как указано на рисунке. Пусть $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ — реакции левой фермы, приложенные к ферме BC в точке B, а $\overline{X}'_B$, $\overline{Y}'_B$ — реакции правой фермы, приложенные в той же точке к ферме AB, причем $\overline{X}'_B = -\overline{X}_B$ и $\overline{Y}'_B = -\overline{Y}_B$.

Так как в данной задаче нужно найти шесть неизвестных реакций (X_A, Y_A, X_C, Y_C, X_B, Y_B), то нужно составить шесть уравнений равновесия. Для этого сначала составим три уравнения равновесия для всей системы в целом (уравнения равновесия внешних сил $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$, $\overline{P}$, $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$).

Приравнивая нулю сумму моментов сил относительно каждой из точек A и C и сумму проекций этих сил на ось x, получим:

$$1)\ X_A + X_C + P = 0,$$

$$2)\ Y_C \cdot l - Q_2 (l - a) - Q_1 \cdot a - P \cdot h = 0,$$

$$3)\ Q_1 (l - a) + Q_2 \cdot a - Ph - Y_A \cdot l = 0.$$

Далее составим три уравнения равновесия для фермы BC (уравнения равновесия сил $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Q}_2$, приложенных к этой ферме). Приравнивая нулю сумму моментов этих сил относительно точки C и сумму их проекций на оси x и y, получим:

$$4)\ X_B + X_C = 0,$$

$$5)\ Y_C + Y_B - Q_2 = 0,$$

$$6)\ Q_2 \cdot a - X_B \cdot H - Y_B \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Решим теперь полученную систему шести уравнений. Из второго и третьего уравнений находим:

$$Y_A = \frac{Q_1 l - Q_1 a + Q_2 a - Ph}{l} = \frac{Q_1 l - Ph}{l} = Q - P\frac{h}{l},$$

$$Y_C = \frac{Q_2 l - Q_2 a + Q_1 a + Ph}{l} = \frac{Q_2 l + Ph}{l} = Q + P\frac{h}{l}.$$

Из пятого уравнения находим:

$$Y_B = Q_2 - Y_C = Q_2 - Q_2 - P\frac{h}{l} = -\frac{h}{l}P.$$

Из шестого уравнения имеем:

$$H \cdot X_B = Q_2 a + \frac{h}{2}P \text{ и } X_B = \frac{2aQ_2 + hP}{2H}.$$

Теперь из четвертого и первого уравнений получаем:

$$X_C = -X_B = -\frac{2aQ_2 + hP}{2H},$$

$$X_A = -P - X_C = \frac{2aQ_2 + hP}{2H} - P = \frac{2aQ_2 + hP - 2HP}{2H}$$

или

$$X_A = \frac{2aQ_2 + P(h - 2H)}{2H}.$$

Описанные квалификация и типы задач не включают всех видов задач на равновесие системы тел. Необходимо иметь в виду, что возможны и такие задачи, в которых два тела, входящие в данную систему, соединены между собой двумя внутренними связями того или другого из описанных типов связей, например при помощи нити и шарнира, как в задаче № 147 из «Сборника задач» И. В. Мещерского. Кроме того, возможны задачи на равновесие системы трех тел. Методы решения всех таких задач остаются такими же, как и в случае одной внутренней связи, соединяющей два тела системы.

ГЛАВА III

РАВНОВЕСИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трением скольжения называется сопротивление, возникающее при относительном скольжении двух соприкасающихся тел. Поэтому сила трения скольжения, приложенная к одному из трущихся тел, направлена противоположно его скорости относительно второго тела.

Опытным путем установлено, что величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению одного из трущихся тел на другое, т. е.

$$F_{Tp} = f \cdot N. \tag{25}$$

Коэффициент пропорциональности f (отвлеченное число) называется коэффициентом трения скольжения.

Как показывает опыт, величина этого коэффициента зависит от материала трущихся тел, от состояния их поверхностей, а также от их относительной скорости.

Если трущиеся тела находятся в покое, то в этом случае трение называется статическим. *Максимальная* величина силы статического трения, т. е. величина этой силы, соответствующая моменту начала относительного скольжения трущихся тел, определяется по той же формуле, что и в случае трения при относительном движении, т. е.

$$F_{Tp\,\max} = f_{cm} \cdot N, \tag{26}$$

где f_{cm} — статический коэффициент трения.

Этот коэффициент обычно несколько больше коэффициента трения при движении. Отсюда следует, что величина силы статического трения всегда удовлетворяет условию:

$$F_{Tp} \leqslant f_{cm} \cdot N. \tag{26'}$$

Благодаря наличию силы трения между данным телом и опорной поверхностью, полная реакция $\overline{R}$ этой поверхности есть равнодействующая двух сил: нормальной реакции $\overline{N}$ и силы трения $\overline{F}_{(Tp)}$ (рис. 46).

Рис. 46

Угол φ между направлениями нормальной реакции $\overline{N}$ и полной реакции $\overline{R}$, ***соответствующий максимальному значению силы трения,*** называется ***углом трения.***

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_{Tp\,\max}}{N} = \frac{f_{cm} \cdot N}{N} = f_{cm}. \tag{27}$$

Метод решения задач статики при наличии трения остается таким же, как и в случае отсутствия трения, т. е. сводится к составлению и решению уравнений равновесия, но только в эти уравнения, кроме заданных сил, приложенных к данному телу, и тех реакций, которые рассматривались в предыдущей главе, войдут еще и силы трения. При этом следует иметь в виду, что в таких задачах расчет ведется обычно на максимальную величину сил трения, а потому эти силы определяются по формуле

$$F_{Tp\,\max}=f_{cm}\cdot N.$$

Рассматриваемые ниже задачи, относящиеся к равновесию тел при наличии трения, можно разделить, как и в предыдущей главе, на два основных типа:

I. Задачи, относящиеся к равновесию одного твердого тела.

II. Задачи, в которых рассматривается равновесие системы тел.

Задачи, относящиеся к первому типу, можно еще подразделить на следующие две группы:

1. Задачи, решаемые при помощи двух уравнений равновесия (двух уравнений проекций).

2. Задачи, решаемые при помощи трех уравнений равновесия.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Первая группа

Задачи, решаемые при помощи двух уравнений равновесия
(задачи 73, 74)

Пример 27

Дробление руды при помощи щековой дробилки происходит путем раздавливания ее между подвижной щекой *BC* и неподвижной щекой *AC*.

Найти максимальную величину угла α между щеками, при котором возможно дробление, для чего руда не должна выдавливаться вверх. Угол трения между куском руды и щеками дробилки равен φ (рис. 47).

Решение

Нормальные реакции щек *AC* и *BC* обозначим $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, силы трения — $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$; при этом

$$F_1 \leqslant f\cdot N_1 \text{ и } F_2 \leqslant f\cdot N_2,$$

где f — коэффициент трения между куском руды и поверхностями щек *AC* и *BC*, $f=\operatorname{tg}\varphi$, φ — угол трения.

Так как под действием сил $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ кусок руды будет выдавливаться вверх, то приложенные к нему силы трения $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ будут направлены вдоль щек AC и BC вниз.

Следовательно, кусок раздрабливаемой руды находится в равновесии под действием сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ (весом руды пренебрегаем, ввиду малых размеров куска руды), а потому сумма проекций этих сил на любую ось равна нулю. Если за оси проекций выберем направления CA и CB, то будем иметь:

1) $-F_1 - F_2\cos\alpha + N_2\sin\alpha = 0,$

2) $-F_2 - F_1\cos\alpha + N_1\sin\alpha = 0,$

или

1) $F_1 + F_2\cos\alpha = N_2\sin\alpha,$

2) $F_1\cos\alpha + F_2 = N_1\sin\alpha.$

Сложив эти уравнения, получим:

$$(F_1 + F_2)(1 + \cos\alpha) = (N_1 + N_2)\sin\alpha.$$

Так как

$$F_1 + F_2 \leqslant f(N_1 + N_2),$$

то

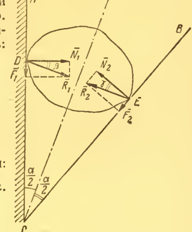


Рис. 47

$$(1 + \cos\alpha)(F_1 + F_2) \leqslant f(1 + \cos\alpha)(N_1 + N_2),$$

или

$$(N_1 + N_2)\sin\alpha \leqslant (N_1 + N_2) f (1 + \cos\alpha),$$

отсюда

$$\sin\alpha \leqslant f(1 + \cos\alpha),$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \leqslant f.$$

Но

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

а

$$1 + \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

поэтому

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} \leqslant f,$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \varphi,$$

или

$$\alpha \leqslant 2\varphi.$$

Следовательно, максимальная величина угла, при котором руда не будет выдавливаться вверх, равна удвоенному углу трения.

Приведенное решение этой задачи можно упростить, если за ось проекций принять биссектрису угла ACB. Тогда достаточно составить только одно уравнение проекций на эту ось. В самом деле, проектируя все силы, приложенные к куску руды, на направление биссектрисы угла ACB, получим:

$$-F_1\cos\frac{\alpha}{2} - F_2\cos\frac{\alpha}{2} + N_1\sin\frac{\alpha}{2} + N_2\sin\frac{\alpha}{2} = 0,$$

или

$$(F_1 + F_2)\cos\frac{\alpha}{2} = (N_1 + N_2)\sin\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{F_1 + F_2}{N_1 + N_2}.$$

Но

$$F_1 + F_2 \leqslant f(N_1 + N_2) = \operatorname{tg}\varphi\cdot(N_1 + N_2),$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \operatorname{tg}\varphi,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{2} \leqslant \varphi,$$

или

$$\alpha \leqslant 2\varphi.$$

Рассмотрим далее геометрический способ решения этой задачи.

Сначала построим линии действия полных реакций $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$ щек AC и BC, приложенных к куску руды в точках E и D. Угол между полной реакцией и ее нормальной составляющей не превышает угла трения, поэтому, обозначая угол между силами $\overline{R_1}$ и $\overline{N_1}$ через β и угол между силами $\overline{R_2}$ и $\overline{N_2}$ через γ, будем иметь: $\beta \leqslant \varphi$ и $\gamma \leqslant \varphi$.

Так как кусок руды находится в равновесии под действием двух сил $\overline{R_1}$ и $\overline{R_2}$, то линии действия этих сил лежат на пря-

мой *ED*. Из треугольника *CDE* имеем:

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma.$$

Но

$$\beta + \gamma \leqslant 2\varphi.$$

Следовательно,

$$\alpha \leqslant 2\varphi,$$

т. е.

$$\alpha_{max} = 2\varphi.$$

Пример 28

По наклонной плоскости с верхнего горизонта на нижний равномерно спускают вагонетки, груженные углем, и поднимают порожние. Подобрать

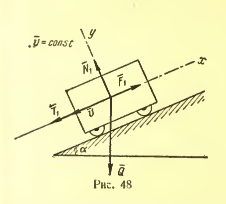


Рис. 48

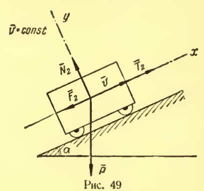


Рис. 49

угол α наклона плоскости так, чтобы сила тяги при подъеме порожней и при спуске груженой вагонеток была одинакова. Такой угол в горном деле называется углом равного сопротивления.

Дано: вес порожней вагонетки равен *P*, вес вагонетки вместе с углем равен *Q* (рис. 48, 49).

Решение

Рассмотрим равномерный спуск груженой вагонетки по наклонной плоскости. Равнодействующую нормальных реакций наклонной плоскости обозначим $\overline{N}_1$. Сила общего сопротивления $\overline{F}_1$, приведенная к центру тяжести вагонетки, направлена параллельно наклонной плоскости вверх, т. е. в сторону, противоположную движению вагонетки (рис. 48).

Предположим, что искомый угол α наклона плоскости меньше угла трения. Тогда при равномерном спуске вагонетки сила

тяги $\overline{T}_1$ должна быть направлена вниз, параллельно наклонной плоскости.

Так как вагонетка движется равномерно, то силы $\overline{N}_1$, $\overline{T}_1$, $\overline{F}_1$, $\overline{Q}$ уравновешиваются; поэтому сумма проекций этих сил на каждую из осей x и y, направленных, как указано на рисунке, равна нулю, т. е.

$$1)\ F_1 - T_1 - Q\sin\alpha = 0,$$
$$2)\ N_1 - Q\cos\alpha = 0.$$

Кроме того,

$$3)\ F_1 = fN_1,$$

где f — приведенный коэффициент общего сопротивления.

Из второго уравнения находим:

$$N_1 = Q\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$F_1 = fQ\cos\alpha.$$

Подставив значение F_1 в первое уравнение, получим:

$$T_1 = fQ\cos\alpha - Q\sin\alpha = Q(f\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Далее рассмотрим равномерный подъем порожней вагонетки по наклонной плоскости (рис. 49). В этом случае сила тяги $\overline{T}_2$ направлена параллельно наклонной плоскости вверх, а равнодействующая $\overline{F}_2$ сил трения направлена по наклонной плоскости вниз. Кроме того, вместо силы $\overline{Q}$ к вагонетке приложена сила $\overline{P}$. Равнодействующую нормальных реакций наклонной плоскости, приложенных к вагонетке, обозначим $\overline{N}_2$.

Аналогично предыдущему, получим следующие два уравнения равновесия:

$$1)\ N_2 - P\cos\alpha = 0,$$
$$2)\ T_2 - F_2 - P\sin\alpha = 0.$$

Кроме того,

$$3)\ F_2 = fN_2.$$

Решая эту систему уравнений, как и в предыдущем случае, находим:

$$T_2 = F_2 + P\sin\alpha = P(f\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Так как по условию задачи силы тяги в первом и во втором случаях должны быть равны, то

$$T_1 = T_2,$$

или

$$P(f\cos\alpha + \sin\alpha) = Q(f\cos\alpha - \sin\alpha),$$

а поэтому

$$f\cos\alpha\,(P - Q) = \sin\alpha\,(P + Q),\ \text{откуда}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(P-Q)}{P+Q}.$$

Вторая группа

Задачи, решаемые при помощи трех уравнений равновесия
(задачи 175—182)

Пример 29

Лестница AB длиной $2a$ и весом P опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Коэффициент трения в точке A равен 0,4, а в точке B равен 0,5. Определить наименьший угол наклона лестницы, при котором она может оставаться в равновесии (рис. 50).

Решение

Нормальные реакции пола и стены, приложенные к лестнице AB в точках A и B, обозначим соответственно $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$, а силы трения, приложенные в тех же точках, $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Тогда лестница AB находится в равновесии под действием пяти сил: $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_2$, $\overline{P}$. Приравнивая нулю сумму проекций этих сил на каждую из осей x и y и сумму их моментов относительно точки A, получим следующих три уравнения равновесия

Рис. 50

$$1)\ N_2 - F_1 = 0,$$
$$2)\ N_1 + F_2 - P = 0,$$
$$3)\ P\cdot a\cos\alpha - N_2\cdot 2a\sin\alpha - 2a\cos\alpha\cdot F_2 = 0.$$

Так как угол α — ***наименьший*** угол наклона лестницы, при котором лестница находится на границе между покоем и скольжением, то

$$F_1 = 0{,}4N_1 \quad \text{и} \quad F_2 = 0{,}5N_2.$$

Подставив значения F_1 и F_2 в первое, второе и третье уравнения и сокращая третье уравнение на a, получим

$$1)\ N_2 = 0{,}4N_1,$$
$$2)\ N_1 = P - 0{,}5N_2,$$
$$3)\ 2\sin\alpha\cdot N_2 + 2\cdot 0{,}5N_2\cdot\cos\alpha = P\cos\alpha.$$

Из первых двух уравнений находим

$$N_2 = 0{,}4N_1 = 0{,}4\,(P - 0{,}5N_2),$$

откуда

$$N_2\,(1 + 0{,}4\cdot 0{,}5) = 0{,}4P$$

и

$$N_2 = \frac{0{,}4}{1+0{,}2}P = \frac{1}{3}P.$$

Подставим найденное значение N_2 в уравнение (3) и разделим все члены этого уравнения на $\cos\alpha$. Тогда будем иметь:

$$N_2(2\,\mathrm{tg}\,\alpha+1)=P,$$

или

$$(2\,\mathrm{tg}\,\alpha+1)\cdot\frac{P}{3}=P,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3-1}{2}=1,\ \text{и}\ \alpha=45^{\circ}.$$

Рассмотрим теперь геометрический способ решения этой же задачи (рис. 51).

Сначала построим линии действия полных реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ в точках A и B, причем

$$\overline{R}_A=\overline{N}_2+\overline{F}_2\ \text{и}\ \overline{R}_B=\overline{N}_1+\overline{F}_1.$$

Для этого отложим от линии действия нормальной реакции $\overline{N}_1$ в сторону действия силы трения $\overline{F}_1$ угол, равный углу трения $\varphi_1=\mathrm{arc\,tg}\,0{,}4$. Тогда получим линию действия силы $\overline{R}_A$. Точно так же отложив угол, равный углу трения $\varphi_2=\mathrm{arc\,tg}\,0{,}5$, от линии действия силы $\overline{N}_2$ в сторону действия силы $\overline{F}_2$, получим линию действия полной реакции $\overline{R}_B$. Так как балка находится в равновесии под действием трех сил: $\overline{P}$, $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

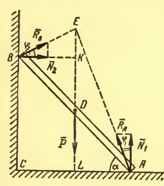


Рис. 51

Если продолжим линии действия сил $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ до их пересечения в точке E, то линия действия силы $\overline{P}$ должна пройти через точку E. Точку пересечения линий действия сил $\overline{P}$ и $\overline{N}_2$ обозначим K (рис. 51).

Рассмотрим треугольник BKE. Из этого треугольника имеем:

$$\frac{EK}{BK}=\mathrm{tg}\,\varphi_2=0{,}5.$$

Но

$$BK=a\cos\alpha,\ \text{а}\ EK=EL-LK.$$

Из треугольника ELA находим:

$$EL=LA\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi_1=a\cos\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi_1=\frac{10}{4}\cdot a\cos\alpha=\frac{5}{2}a\cos\alpha$$

и

$$KL=BC=2a\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$EK = \frac{5}{2} a \cos\alpha - 2a \sin\alpha = \\ = a\left(\frac{5}{2}\cos\alpha - 2\sin\alpha\right).$$

Таким образом,

$$\frac{a\left(\frac{5}{2}\cos\alpha - 2\sin\alpha\right)}{a\cos\alpha} = 0{,}5,$$

или

$$\frac{5}{2} - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}5,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2{,}5 - 0{,}5}{2} = 1 \text{ и } \alpha = 45^\circ.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

(задачи 186—188)

Пример 30

Два груза A и B, веса которых равны P и Q, лежащие на наклонных плоскостях с углами α и β, связаны веревкой, перекинутой через блок O.

Найти отношение весов $\frac{P}{Q}$ при равновесии, если угол трения грузов о плоскость равен φ (рис. 52).

Решение

Найдем наибольшую величину отношения $\frac{P}{Q}$, при которой еще возможно равновесие, предполагая, что дальнейшее увеличение этого отношения вызовет движение груза A по наклонной плоскости вниз, а, следовательно, груз B начнет двигаться вверх. В этом случае силы трения $\overline{F}_{тр_1}$ и $\overline{F}_{тр_2}$, приложенные к грузам A и B, будут направлены вдоль соответствующих наклонных плоскостей, как указано на рисунке. Нормальные реакции наклонных плоскостей, приложенные к грузам, обозначим $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$. Рассмотрим равновесие груза A, к которому приложены силы $\overline{P}$, $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1$, а также сила натяжения $\overline{T}_1$ веревки.

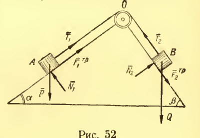


Рис. 52

Проектируя эти силы на направление AO и направление, перпендикулярное к AO, получим два уравнения равновесия:

$$1)\ F_1 + T_1 - P\sin\alpha = 0,$$
$$2)\ N_1 - P\cos\alpha = 0.$$

Аналогично, рассматривая равновесие груза B, к которому приложены силы $\overline{Q}$, $\overline{F_2}$, $\overline{N_2}$ и сила $\overline{T_2}$ натяжения веревки, и проектируя эти силы на направление OB и направление, перпендикулярное к OB, получим еще два уравнения равновесия:

$$3)\ F_2 - T_2 + Q\sin\beta = 0,$$
$$4)\ N_2 - Q\cos\beta = 0.$$

Учитывая, что $T_1 = T_2$, исключим эти две неизвестные силы, сложив первое уравнение с третьим.

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ F_1 + F_2 - P\sin\alpha + Q\sin\beta = 0,\\ &2)\ N_1 = P\cos\alpha,\\ &3)\ N_2 = Q\cos\beta. \end{aligned}\right\}$$

Но

$$4)\ F_1 = \operatorname{tg}\varphi\cdot N_1 = \operatorname{tg}\varphi\cdot P\cos\alpha,$$

а

$$F_2 = \operatorname{tg}\varphi\cdot N_2 = \operatorname{tg}\varphi\cdot Q\cos\beta,$$

поэтому

$$F_1 + F_2 = \operatorname{tg}\varphi\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta).$$

С другой стороны, из первого уравнения имеем:

$$F_1 + F_2 = P\sin\alpha - Q\sin\beta.$$

Следовательно,

$$P\sin\alpha - Q\sin\beta = \operatorname{tg}\varphi\,(P\cos\alpha + Q\cos\beta).$$

Разделив это уравнение на Q, получим:

$$\frac{P}{Q}\sin\alpha - \sin\beta = \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{P}{Q}\cos\alpha + \cos\beta\right).$$

Отсюда

$$\frac{P}{Q}(\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi\cdot\cos\alpha) = \sin\beta + \operatorname{tg}\varphi\cos\beta$$

и

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\beta + \operatorname{tg}\varphi\cos\beta}{\sin\alpha - \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha} = \frac{\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\beta}{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi} = \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Таким образом, мы нашли наибольшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, при котором еще возможно равновесие, т. е.

$$\left(\frac{P}{Q}\right)_{\max} = \frac{\sin(\beta+\varphi)}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Найдем теперь наименьшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, при котором существует равновесие, но так, что дальнейшее уменьшение этого отношения вызовет опускание груза B и поднятие груза A.

В этом случае направления сил трения $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ будут противоположны направлениям этих сил в предыдущем случае. Поэтому, чтобы получить наименьшее значение отношения $\frac{P}{Q}$, достаточно в первом и третьем уравнениях равновесия изменить знаки при F_1 и F_2 на обратные, что равносильно изменению знака при $\operatorname{tg} \varphi$ в четвертом уравнении.

Следовательно, будем иметь:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)_{\min} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)},$$

Таким образом, равновесие данной системы возможно при условии:

$$\frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)} \leqslant \frac{P}{Q} \leqslant \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin(\alpha - \varphi)}.$$

Пример 31

Два клина A и B, коэффициент трения между которыми равен $f = \operatorname{tg} \varphi$, могут двигаться без трения в своих направляющих. К клину A приложена сила $\overline{P}$.

Какую силу $\overline{Q}$ нужно приложить к клину B, чтобы клин A двигался равномерно в направлении действия силы $\overline{P}$, если углы α и β известны. Весом клиньев пренебречь (рис. 53).

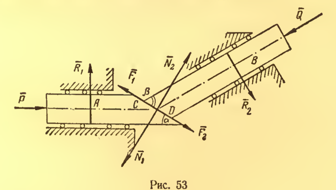


Рис. 53

Решение

Обозначим реакцию направляющих, приложенную к клину A, через $\overline{R}_1$, а реакцию направляющих, приложенную к клину B,

через $\overline{R}_2$. Так как каждый клин может двигаться в своих направляющих без трения, то реакции $\overline{R}_1$ и $\overline{R}_2$ направлены по нормали к поверхности соответствующего клина.

При равномерном движении клина A в направлении силы $\overline{P}$ клин B будет скользить по клину A вверх, а потому сила трения $\overline{F}_2$, приложенная к клину B, будет направлена по прямой CD вниз, т. е. в сторону, противоположную перемещению клина B относительно клина A. По закону равенства действия и противодействия, сила трения $\overline{F}_1$ клина B, приложенная к клину A, будет равна по величине и направлена противоположно силе трения $\overline{F}_2$, а нормальная реакция $\overline{N}_2$ клина A, приложенная к клину B, равна по величине и направлена противоположно нормальной реакции $\overline{N}_1$ клина B, приложенной к клину A, т. е.

$$\overline{N}_1 = -\overline{N}_2 \text{ и } \overline{F}_1 = -\overline{F}_2.$$

Так как клин A движется равномерно, то силы $\overline{P}$, $\overline{R}_1$, $\overline{N}_1$, $\overline{F}_1$, приложенные к этому клину, уравновешиваются. При этом клин B будет также двигаться равномерно, и, следовательно, силы $\overline{Q}$, $\overline{F}_2$, $\overline{R}_2$, $\overline{N}_2$, приложенные к этому клину, тоже уравновешиваются. Поэтому сумма проекций всех сил, приложенных к каждому клину, на направление движения этого клина равна нулю, т. е.

$$1)\ P - F_1 \cos\alpha - N_1 \sin\alpha = 0,$$
$$2)\ F_2 \cos\beta + N_2 \sin\beta - Q = 0.$$

Кроме того,

$$F_1 = fN_1 \text{ и } F_2 = fN_2,$$

где f — коэффициент динамического трения. Подставив эти значения сил трения в первое и второе уравнения, будем иметь:

$$P = N_1 (f\cos\alpha + \sin\alpha),$$
$$Q = N_2 (f\cos\beta + \sin\beta).$$

Но

$$N_1 = N_2,$$

поэтому

$$\frac{P}{Q} = \frac{f\cos\alpha + \sin\alpha}{f\cos\beta + \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha + \sin\alpha}{\operatorname{tg}\varphi\cos\beta + \sin\beta} =$$
$$= \frac{\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha}{\sin\varphi\cos\beta + \cos\varphi\sin\beta} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \beta)},$$

откуда

$$Q = P \cdot \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\sin(\varphi + \alpha)}.$$

Пример 32

Шкив радиусом r тормозится при помощи двух тормозных колодок A и B, жестко соединенных с рычагами O_2F и O_1D, которые могут вращаться соответственно вокруг неподвижных точек O_2 и O_1. Тяга EF шарнирно соединена в точке F с колодкой A, а в точке E—с концом ломаного рычага EDC, соединенного с колодкой B при помощи шарнира D; к концу C рычага приложена сила $\overline{P}$ под прямым углом к плечу DC, параллельному тяге EF. Зная длины r, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 и углы α и β, а также коэффициент трения f колодок о шкив, найти момент, тормозящий шкив (рис. 54).

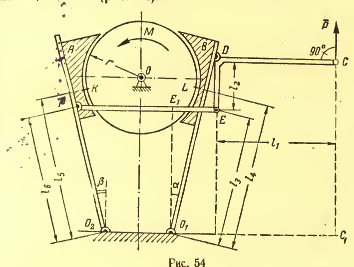


Рис. 54

Решение

В данном случае система тел состоит из шкива O и трех рычагов O_2A, O_1B и CDE, причем рычаги O_1B, O_2A и CDE и шкив O находятся в равновесии.

Нормальные реакции колодок A и B, приложенные к шкиву O в точках K и L, обозначим $\overline{N}_2$ и $\overline{N}_1$, а силы трения, приложенные к шкиву в тех же точках и направленные по касательным к шкиву, в сторону, противоположную его вращению, обозначим $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_1$ (рис. 55). Тогда

$$F_1 = fN_1 \text{ и } F_2 = fN_2,$$

где f — данный динамический коэффициент трения колодок о шкив. По закону равенства действия и противодействия, к колодкам B и A приложены нормальные реакции $\overline{N}_1'$ и $\overline{N}_2'$ и силы трения $\overline{F}_1'$ и $\overline{F}_2'$, причем

$$\overline{F}_1' = -\overline{F}_1 \text{ и } \overline{F}_2' = -\overline{F}_2,\ \overline{N}_1' = -\overline{N}_1,\ \overline{N}_2' = -\overline{N}_2,$$

Реакции $\overline{T}_1$ и $\overline{T}_2$ тяги EF, приложенные к рычагам O_2A и CDE в точках F и E, направлены по EF, причем $\overline{T}_1 = -\overline{T}_2$ (рис. 57 и 58).

Сначала рассмотрим равновесие рычага CDE с неподвижной точкой D под действием активных сил $\overline{P}$ и $\overline{T}_1$. Согласно условию равновесия рычага, имеем:

$$m_D(\overline{P}) + m_D(\overline{T}_1) = 0,$$

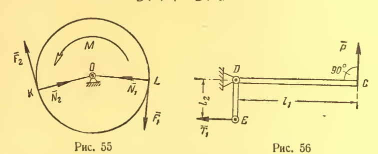


Рис. 55 Рис. 56

или

$$Pl_1 - T_1l_2 = 0,$$

откуда

$$T_1 = P\frac{l_1}{l_2} \text{ (рис. 56).}$$

Теперь рассмотрим равновесие системы рычагов O_1B и CDE в целом (как одного твердого тела); приравняем нулю сумму моментов относительно точки O_1 всех *внешних* сил, т. е. сил $\overline{P}$, $\overline{N}'_1$, $\overline{F}'_1$, $\overline{T}_1$ (рис. 58). Момент внешней реакции шарнира O_1 от-

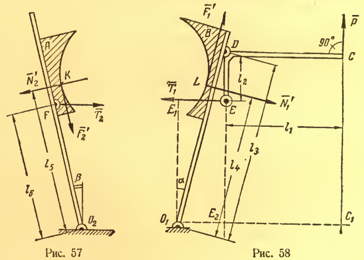


Рис. 57 Рис. 58

носительно точки O_1 равен нулю. Кроме того, пренебрегая высотой колодки, т. е. плечом силы $\bar{F}'_1$ относительно точки O_1, будем считать момент силы $\bar{F}'_1$ относительно этой точки равным нулю. Тогда получим:

$$P \cdot O_1C_1 + T_1 \cdot O_1E_1 - N'_1 \cdot l_4 = 0,$$

но

$$O_1C_1 = O_1E_2 + E_2C_1 = l_3 \sin\alpha + l_1$$

и

$$O_1E_1 = EE_2 = DE_2 - l_2 = l_3 \cos\alpha - l_2,$$

поэтому

$$P(l_3 \sin\alpha + l_1) + T_1(l_3 \cos\alpha - l_2) - N'_1 l_4 = 0.$$

Отсюда

$$N'_1 = P\left(\frac{l_3}{l_4}\sin\alpha + \frac{l_1}{l_4}\right) + T_1\left(\frac{l_3 \cos\alpha}{l_4} - \frac{l_2}{l_4}\right).$$

Подставляя значение T_1, получим:

$$N'_1 = P\left(\frac{l_3}{l_4}\sin\alpha + \frac{l_1}{l_4}\right) + P\frac{l_1}{l_2}\frac{l_3}{l_4}\cos\alpha - P\frac{l_1 \cdot l_2}{l_4 \cdot l_2} =$$

$$= P\left(\frac{l_3}{l_4}\sin\alpha + \frac{l_1}{l_2}\frac{l_3}{l_4}\cos\alpha\right) = P\left(\sin\alpha + \frac{l_1}{l_2}\cos\alpha\right)\frac{l_3}{l_4}.$$

Рассмотрим теперь O_2A (рис. 57); написав условие равновесия этого рычага, получим:

$$m_{O_2}(\bar{T}_2) + m_{O_2}(\bar{N}'_2) + m_{O_2}(\bar{F}'_2) = 0,$$

но

$$m_{O_2}(\bar{T}_2) = -T_2 l_6 \cos\beta, \quad m_{O_2}(\bar{N}'_2) = N'_2 l_5.$$

Пренебрегая высотой колодки A, момент силы $\bar{F}_2$ относительно O_2 будем считать равным нулю.

Следовательно,

$$-T_2 l_6 \cos\beta + N'_2 l_5 = 0,$$

откуда

$$N'_2 = T_2 \frac{l_6}{l_5}\cos\beta.$$

Определив реакции $N'_2 = N_2$ и $N'_1 = N_1$, находим силы трения, тормозящие шкив:

$$F_1 = f \cdot N_1 = f \cdot P\left(\frac{l_1}{l_2}\cos\alpha + \sin\alpha\right)\frac{l_3}{l_4},$$

$$F_2 = f \cdot N_2 = fP\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{l_6}{l_5}\cos\beta.$$

Далее рассмотрим равновесие шкива (рис. 55);

$$\Sigma m_O(\bar{F}_i) = 0.$$

или

$$m_O(\overline{F}_1)+m_O(\overline{F}_2)+M=0,$$

откуда

$$M-F_1\cdot r-F_2 r=0 \text{ и } M=(F_1+F_2)\cdot r,$$

т. е. тормозящий момент M равен сумме моментов сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ относительно точки O:

$$M=r(F_1+F_2)=r\left[fP\frac{l_3}{l_4}\left(\frac{l_1}{l_2}\cos\alpha+\sin\alpha\right)+fP\frac{l_1}{l_2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{l_6}{l_5}\cos\beta\right]=rfP\cdot\left(\frac{l_3}{l_4}\frac{l_1}{l_2}\cos\alpha+\frac{l_3}{l_4}\sin\alpha+\frac{l_1 l_6}{l_2 l_5}\cos\beta\right)=$$
$$=f\cdot P\cdot r\left[\left(\sin\alpha+\frac{l_1}{l_2}\cos\alpha\right)\frac{l_3}{l_4}+\frac{l_1 l_6}{l_2 l_5}\cos\beta\right].$$

ГЛАВА IV

СИСТЕМА СИЛ, РАСПОЛОЖЕННЫХ КАК УГОДНО В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Момент силы относительно точки как вектор и момент силы относительно оси

При изучении системы сил в пространстве момент силы $\overline{F}$ относительно точки O изображается вектором, приложенным в точке O, перпендикулярным к плоскости π, в которой лежат сила $\overline{F}$ и точка O, и направленным так, чтобы наблюдатель,

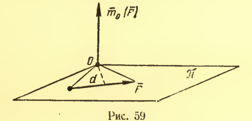


Рис. 59

смотрящий с конца этого вектора на плоскость π, видел силу $\overline{F}$ направленной по отношению к точке O против часовой стрелки.

Величина этого момента равна произведению силы F на длину перпендикуляра d, опущенного из точки O на линию действия этой силы (рис. 59).

Аналогично в виде вектора изображается и момент пары, а именно: вектор-момент пары перпендикулярен плоскости этой пары и направлен так, чтобы наблюдатель, смотрящий на пару с конца этого вектора, видел направление вращения, вызываемого парой, против часовой стрелки. Величина момента пары

равна произведению величины одной из сил пары на плечо этой пары, т. е. на расстояние между линиями действия сил пары (рис. 60).

Вектор-момент пары равен (по величине и направлению) вектору-моменту одной из сил пары относительно точки приложения второй силы этой пары.

Кроме момента силы относительно точки, при изучении системы сил в пространстве приходится рассматривать также и момент силы относительно той или иной оси.

Моментом силы $\bar{F}$ относительно данной оси называется алгебраическое значение момента проекции этой силы на плоскость,

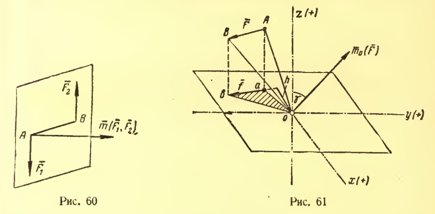


Рис. 60 Рис. 61

перпендикулярную к этой оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

Следовательно, чтобы найти момент силы $\bar{F}$ относительно оси z, нужно спроектировать силу $\bar{F}$ на плоскость, перпендикулярную к оси z и проведенную через произвольную точку O, лежащую на этой оси, и затем полученную проекцию f умножить на длину h перпендикуляра, опущенного из точки O на линию проекции $\bar{f}$. При этом произведение fh берется со знаком плюс или минус (рис. 61).

Таким образом,

$$m_z(\bar{F}) = \pm fh. \tag{28}$$

Знак момента силы относительно данной оси выбирается следующим образом: если наблюдатель, смотрящий с положительного конца данной оси видит проекцию $\bar{f}$ направленной по отношению к точке O против часовой стрелки, то момент силы $\bar{F}$ относительно этой оси считается положительным. В противном случае этот момент считается отрицательным. Поэтому на рис. 61 момент силы $\bar{F}$ относительно оси z — положителен.

Из формулы (28) следует, что момент силы относительно оси z равен нулю, если $f=0$, или $h=0$, т. е. когда сила $\bar{F}$ параллельна оси, либо когда линия действия этой силы пересекает данную ось.

Моменты силы $\bar{F}$ относительно трех координатных осей x, y, и z выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yZ - zY, \\ m_y(\bar{F}) &= zX - xZ, \\ m_z(\bar{F}) &= xY - yX, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

где X, Y, Z — проекции силы $\bar{F}$ на координатные оси, а x, y, z — координаты точки приложения силы.

Между моментом силы $\bar{F}$ относительно данной оси и вектором-моментом той же силы относительно какой-нибудь точки, лежащей на этой оси, существует следующая зависимость: проекция вектора-момента силы $\bar{F}$ относительно произвольной точки O на какую-либо ось, проходящую через эту точку, равна моменту силы $\bar{F}$ относительно этой оси, т. е.

$$m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}) \cdot \cos\gamma.$$

Пример 33

Дверь, имеющая форму прямоугольника $ABDC$, может вращаться вокруг вертикальной оси AB. В точке C к двери привязана веревка CF, перекинутая через блок E. К другому концу этой веревки подвешен груз весом $Q=32$ *кГ*. Найти момент силы $\bar{T}$ натяжения веревки относительно оси AB, если ширина двери $BD=0,5$ *м*, угол $\alpha=45°$ и плоскость треугольника ACE — горизонтальна, а $AC=AE$ (рис. 62).

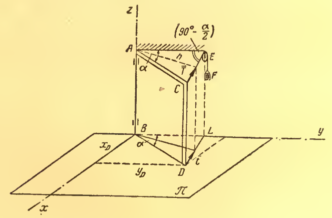


Рис. 62

Решение

Так как сила $\overline{T}$ лежит в плоскости треугольника ACE, перпендикулярной к оси AB, то проекция силы $\overline{T}$ на эту плоскость равна величине самой силы, поэтому

$$m_{AB}(\overline{T}) = Th,$$

где h — высота треугольника CAE.
Из этого равнобедренного треугольника находим:

$$h = AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$m_{AB}(\overline{T}) = T \cdot AC \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 32 \cdot 0{,}5 \cdot \cos 22°30' \approx 14{,}78 \ кГм.$$

Пример 34

Дан куб, длина стороны которого равна a. К вершине B этого куба приложена сила $\overline{P}$, направленная по диагонали BE. Найти моменты силы $\overline{P}$ относительно координатных осей x, y и z, направленных, как указано на рис. 63.

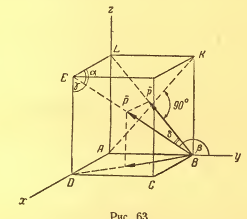


Рис. 63

Решение

Сначала найдем проекции силы $\overline{P}$ на координатные оси.

Обозначим углы, образуемые силой $\overline{P}$ с осями x, y и z, через α, β и γ.

Так как диагональ куба составляет равные углы с его сторонами, то

$$\alpha = \gamma = 180° - \beta.$$

и

$$\cos\alpha = \cos\gamma = -\cos\beta.$$

Но

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

поэтому

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{3},$$

или

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$P_x = P\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{3}},\ P_y = P\cos\beta = -\frac{P}{\sqrt{3}}$$

и

$$P_z = P\cos\gamma = \frac{P}{\sqrt{3}}.$$

Далее из рисунка находим координаты точки B:

$$x_B = z_B = 0,\quad y_B = a.$$

Подставив найденные значения P_x, P_y, P_z и x_B, y_B, z_B в формулы для моментов силы относительно координатных осей, получим:

$$m_x(\bar{P}) = yZ - zY = \frac{aP}{\sqrt{3}} - 0 = P\cdot\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$m_y(\bar{P}) = zX - xZ = 0,$$

$$m_z(\bar{P}) = xY - yX = 0 - a\left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right) = -P\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Моменты силы $\bar{P}$ относительно координатных осей можно, как и в предыдущем примере, вычислить и геометрическим способом, т. е. чтобы найти, например, момент силы $\bar{P}$ относительно оси x, нужно спроектировать силу $\bar{P}$ на плоскость zOy, перпендикулярную к этой оси, и полученную проекцию p умножить на ее плечо h относительно начала координат. Следовательно, будем иметь:

$$m_x(\bar{P}) = m_A(\bar{p}) = p\cdot h = p\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Но

$$p = P\cos\delta,$$

а

$$\cos\delta = \frac{BL}{BE}$$

(из прямоугольного треугольника BLE) или

$$\cos\delta = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$m_x(\bar{P}) = P\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\,\frac{\sqrt{2}}{2} = P\,\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, момент силы относительно координатной оси можно вычислить двумя способами:

1) аналитически, пользуясь формулами (29), выражающими искомый момент силы через проекции этой силы на координатные оси и через координаты ее точки приложения;

2) геометрически, проектируя данную силу на координатную плоскость, перпендикулярную к этой оси, и вычисляя момент этой проекции относительно начала координат.

§ 2. Приведение произвольной системы сил к данному центру

(задачи 232 — 240)

Если задана система сил $\bar{F}_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, расположенных как угодно в пространстве, то эти силы можно привести к произвольно выбранному центру O. В результате такого приведения, как и в случае плоской системы сил, получим одну силу $\bar{R}$, приложенную в центре приведения O и равную главному вектору данной системы сил, и одну пару с вектором-моментом $\bar{M}_O$, равным главному моменту этой системы сил.

Следовательно, будем иметь:

$$\bar{R} = \Sigma\bar{F}_i;\quad \bar{M}_O = \Sigma\bar{m}_O(\bar{F}_i).$$

Аналитически величина и направление векторов $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ определяется по их проекциям на координатные оси x, y и z, начало которых находится в центре приведения O, причем

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \Sigma X_i,\\ R_y &= \Sigma Y_i,\\ R_z &= \Sigma Z_i,\\ M_{Ox} &= \Sigma m_x(\bar{F}_i),\\ M_{Oy} &= \Sigma m_y(\bar{F}_i),\\ M_{Oz} &= \Sigma m_z(\bar{F}_i). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Отсюда имеем:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2},\\ \cos(\bar{R}, \bar{i}) &= \frac{R_x}{R} = \frac{\Sigma X_i}{R},\\ \cos(\bar{R}, \bar{j}) &= \frac{R_y}{R} = \frac{\Sigma Y_i}{R},\\ \cos(\bar{R}, \bar{k}) &= \frac{R_z}{R} = \frac{\Sigma Z_i}{R}; \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
M_O &= \sqrt{[\Sigma m_x(\overline{F}_i)]^2 + [\Sigma m_y(\overline{F}_i)]^2 + [\Sigma m_z(\overline{F}_i)]^2},\\
\cos(\overline{M}_O, \overline{i}) &= \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{\Sigma m_x(\overline{F}_i)}{M_O},\\
\cos(\overline{M}_O, \overline{j}) &= \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{\Sigma m_y(\overline{F}_i)}{M_O},\\
\cos(\overline{M}_O, \overline{k}) &= \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{\Sigma m_z(\overline{F}_i)}{M_O}.
\end{aligned}
\right\} \quad (32)
$$

Величина и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения. Поэтому главный вектор является первым *инвариантом* данной системы сил. Величина и направление главного момента $\overline{M}_O$ изменяются с изменением центра приведения.

Но скалярное произведение $\overline{R}\cdot\overline{M}_O$ главного вектора и главного момента не зависит от выбора центра приведения, т. е. является *вторым инвариантом* данной системы сил. При этом $\overline{R}\cdot\overline{M}_O = R\cdot M_O\cdot\cos\varphi$, где φ — угол между направлениями главного вектора $\overline{R}$ и главного момента $\overline{M}_O$. Выражая это скалярное произведение через проекции векторов $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$, имеем:

$$
\overline{R}\cdot\overline{M}_O = R_x M_{ox} + R_y M_{oy} + R_z M_{oz}. \quad (33)
$$

Если второй инвариант данной системы сил не равен нулю, то эта система приводится к динаме, т. е. к паре и к силе, перпендикулярной к плоскости этой пары (рис. 64).

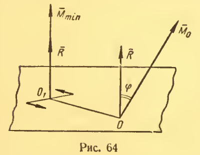


Рис. 64

Прямая, проходящая через точку O_1, по которой направлены векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$, называется *центральной осью* данной системы сил. При этом отрезок OO_1 перпендикулярен к векторам $\overline{R}$ и $\overline{M}_{O_1}$, а его длина равна:

$$
OO_1 = \frac{M_O \sin\varphi}{R}.
$$

При перемещении центра приведения по центральной оси главный момент данной системы не изменяется, т. е. остается равным M_{O_1}, причем его величина является наименьшей по сравнению с величиной главного момента данной системы сил относительно всякого другого центра приведения, не лежащего на центральной оси.

Величина этого наименьшего момента определяется по формуле:

$$
M_{\min} = M_O\cos\varphi = \frac{M_O R\cos\varphi}{R} = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_O}{R}. \quad (34)
$$

Аналитически положение центральной оси определяется ее двумя уравнениями, которые имеют следующий вид:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} =$$

$$= \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}, \qquad (35)$$

где x, y и z — текущие координаты точки, лежащей на центральной оси.

Может оказаться, что скалярное произведение $\bar{R} \cdot \bar{M}_O$ равно нулю, но каждый из сомножителей отличен от нуля. В этом случае главный момент перпендикулярен главному вектору, т. е. сила и пара, получающаяся в результате приведения данной системы сил к центру O, лежат в одной плоскости.

В этом случае, как уже было указано в § 2 гл. II, система приводится к равнодействующей, $\bar{R}^* = \bar{R}$, которая проходит через точку O_1, лежащую на перпендикуляре, к векторам $\bar{R}$ и $\bar{M}_O$ на расстоянии $OO_1 = \frac{M_O}{R}$ (рис. 65). Если $M_O = 0$ и $R \neq 0$, то система сил приводится, очевидно, к одной равнодействующей силе $\bar{R}$, проходящей через центр приведения O.

Если же $R = 0$, а $M_O \neq 0$, то заданная система сил приводится к одной паре с моментом $\bar{M}_O$; в этом случае главный мо-

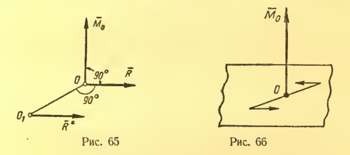


Рис. 65 Рис. 66

мент системы не изменяется с изменением центра приведения, т. е. относительно любого центра приведения главный момент будет равен $\bar{M}_O$ (рис. 66).

Наконец, если главный вектор $\bar{R}$ и главный момент $\bar{M}_O$ одновременно равны нулю, то данная система находится в равновесии.

Эти результаты можно расположить в табл. 6.

Таблица 6

$\overline{R}\cdot\overline{M}_0 \neq 0$	$\overline{R}\cdot\overline{M}_0 = 0$			
	$R \neq 0$, $M_0 \neq 0$	$R = 0$, $M_0 \neq 0$	$R \neq 0$, $M_0 = 0$	$R = 0$, $M_0 = 0$
Система сил приводится к динаме	Система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i$, не проходящей через центр приведения O	Система сил приводится к одной паре, момент которой равен $\sum \overline{m_0}(\overline{F}_i)$ и не зависит от выбора центра приведения O	Система сил приводится к равнодействующей $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$, проходящей через центр приведения	Система сил находится в равновесии

Пример 35

Даны три силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, приложенные в точках A_1 (0; 2; 1), A_2 (1; — 1; 3), A_3 (2; 3; 1) и их проекции на координатные оси.

Силы	Проекции		
	X	Y	Z
$\overline{P}_1$	3	5	4
$\overline{P}_2$	−2	2	−6
$\overline{P}_3$	−1	−7	2

Привести эту систему сил к началу координат.

Решение

Определим сначала проекции главного вектора и главного момента на координатные оси:

$$R_x = \Sigma X_i = 3 - 2 - 1 = 0,$$
$$R_y = \Sigma Y_i = 5 + 2 - 7 = 0,$$
$$R_z = \Sigma Z_i = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Для вычисления моментов сил $\overline{P}_i$ относительно координатных осей воспользуемся формулами (29). Тогда будем иметь:

$$M_{Ox} = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i) = (-5\cdot 1 + 4\cdot 2) +$$
$$+ [(-1)\cdot(-6) - 3\cdot 2] + [3\cdot 2 - 1(-7)] = 3 + 0 + 13 = 16,$$

$$M_{Oy}=\Sigma(z_iX_i-x_iZ_i)=(1\cdot 3-0\cdot 4)+[3(-2)-1\cdot(-6)]+$$
$$+[-2\cdot 2+1(-1)]=3+0-5=-2,$$
$$M_{Oz}=\Sigma(x_iY_i-y_iX_i)=(0\cdot 5-2\cdot 3)+[1\cdot 2-(-1)\cdot(-2)]+$$
$$+[2\cdot(-7)-3\cdot(-1)]=-6+0-11=-17.$$

Теперь по найденным проекциям определяем величину главного вектора и главного момента:

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=0,$$
$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}=\sqrt{16^2+2^2+17^2}=23{,}4\ \text{кГм}.$$

Для определения направления главного момента находим его направляющие косинусы:

$$\cos(\overline{M}_O,\ \overline{i})=\frac{M_{Ox}}{M_O}=\frac{16}{23{,}4}=0{,}679,$$
$$\cos(\overline{M}_O,\ \overline{j})=\frac{M_{Oy}}{M_O}=\frac{-2}{23{,}4}=-0{,}085,$$
$$\cos(\overline{M}_O,\ \overline{k})=\frac{M_{Oz}}{M_O}=-\frac{17}{23{,}4}=-0{,}727.$$

Так как главный вектор данной системы сил равен нулю, то эта система сил приводится к одной паре с моментом $\overline{M}_O$, причем этот момент не изменяется с изменением центра приведения.

Пример 36

По ребрам призмы действуют, как указано на рис. 67, силы $P_1=40$, $P_2=P_5=10$, $P_3=15$, $P_4=5$ *кГ*. Кроме того, дано $OA=2OK=20$ *см*, $\alpha=30°$. Привести эту систему сил к простейшему виду.

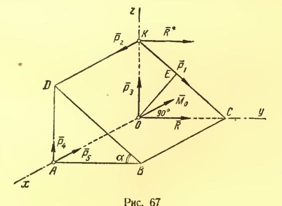


Рис. 67

Решение

Выберем систему координатных осей, как указано на рисунке, и найдем проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x = \Sigma X_i = P_2 - P_5 = 0,$$
$$R_y = \Sigma Y_i = P_1 \cos\alpha = 40 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3},$$
$$R_z = \Sigma Z_i = P_3 + P_4 - P_1 \sin\alpha = 15 + 5 - 40 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что главный вектор направлен по оси y и равен $20\sqrt{3}$ *кГ*.

Приводя данную систему сил к началу координат, найдем проекции M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} на оси x, y, z главного момента $\overline{M}_O$ относительно точки O:

$$M_{Ox} = \Sigma m_x(\overline{P}_i).$$

Так как силы $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, $\overline{P}_5$ пересекают ось x, а сила $\overline{P}_2$ параллельна этой оси, то моменты этих сил относительно оси x равны нулю, и, следовательно,

$$M_{Ox} = m_x(\overline{P}_1).$$

Сила $\overline{P}_1$ лежит в плоскости zOy, причем наблюдатель, смотрящий с положительного конца этой оси, видит силу $\overline{P}_1$ направленной относительно точки O по часовой стрелке, поэтому

$$m_x(\overline{P}_1) = -P_1 \cdot OE = -P_1 OK \cos\alpha = -346 \text{ кГсм}.$$

Далее

$$M_{Oy} = \Sigma m_y(\overline{P}_i).$$

Силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$ пересекают ось y, поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю.

Следовательно,

$$M_{Oy} = m_y(\overline{P}_2) + m_y(\overline{P}_4).$$

Силы $\overline{P}_2$ и $\overline{P}_4$ лежат в плоскости zx, поэтому

$$m_y(\overline{P}_2) = P_2 \cdot OK = 100 \text{ кГсм}$$

и

$$m_y(\overline{P}_4) = -P_4 \cdot OA = -100 \text{ кГсм}.$$

Итак,

$$M_{Oy} = P_2 OK - P_4 OA = 10 \cdot 10 - 5 \cdot 20 = 0.$$

Так как силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$ пересекают ось z, а сила $\overline{P}_4$ параллельна этой оси, а потому момент каждой из этих сил относительно оси z равен нулю, следовательно,

$$M_{Oz} = \Sigma m_z(\overline{P}_i) = 0.$$

Так как

$$M_{Oy}=M_{Oz}=0,$$

то главный момент $\overline{M}_O$ направлен по оси x и

$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}=200\sqrt{3}.$$

Таким образом, данная система сил эквивалентна силе $\overline{R}$, приложенной в точке O и паре с моментом $\overline{M}_O$.

Остается теперь выяснить, к какому простейшему виду можно привести данную систему сил: к одной равнодействующей силе или к динаме. Так как главный вектор $\overline{R}$ перпендикулярен главному моменту $\overline{M}_O$, то сила $\overline{R}$ и пара (с моментом $\overline{M}_O$) лежат в одной плоскости zOy, поэтому они приводятся к одной равнодействующей силе $\overline{R}^*$, равной и параллельной силе $\overline{R}$ и приложенной в точке O_1. Найдем эту точку O_1.

Для этого нужно на прямой, проведенной из точки O и перпендикулярной к векторам $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$, т. е. в данном случае на оси z, отложить отрезок, равный

$$OO_1=\frac{M_O}{R}=\frac{200\sqrt{3}}{20\sqrt{3}}=10.$$

При этом отрезок OO_1 следует отложить на оси в таком направлении, чтобы, смотря с конца вектора — момента $\overline{M}_O$ — можно видеть равнодействующую силу $\overline{R}^*$, приложенную в точке O_1, направленной по отношению к точке O против часовой стрелки. Так как $OO_1=10$, то точка O_1 совпадает с данной точкой K.

Точка K и будет точкой приложения равнодействующей. Итак, данная система сил проводится к равнодействующей силе $\overline{R}^*$, приложенной в точке K и направленной параллельно оси y, причем

$$R^*=20\sqrt{3}\ кГ.$$

Пример 37

Дана система сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, приложенных в вершинах прямоугольного параллелепипеда и направленных, как указано на рис. 68, причем

$$F_1=60,\quad F_2=F_3=10\ кГ,$$
$$F_4=10\sqrt{5},\quad F_5=20\ кГ,$$
$$OA=OB=20\ см,\quad OC=10\ см.$$

Привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение

Координатные оси x, y, z направим, как указано на чертеже, и введем следующие обозначения: угол ODK обозначим α, угол KOB — β и угол AOE — γ.

При вычислении проекций заданных сил на координатные оси, заметим, что проекции силы $\bar{F}_1$ на оси x и y нужно находить так же, как это было указано в примере № 5, т. е. сначала силу $\bar{F}_1$ следует спроектировать на плоскость xOy и полученную проекцию $\bar{f}_1$ спроектировать затем на оси x и y.

Значения проекций всех заданных сил и координаты их точек приложения расположим в виде табл. 7.

Таблица 7

$\bar{F}_i$	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i
$\bar{F}_1$	$-f_1 \sin\beta = -F_1 \sin\alpha \cdot \sin\beta$	$-f_1 \cdot \cos\beta = -F_1 \sin\alpha \cdot \cos\beta$	$-F_1 \cos\alpha$	10	20	20
$\bar{F}_2$	F_2	0	0	0	20	20
$\bar{F}_3$	0	F_3	0	10	0	0
$\bar{F}_4$	$F_4 \sin\gamma$	0	$F_4 \cos\gamma$	0	0	0
$\bar{F}_5$	0	0	F_5	0	0	20

Из прямоугольных треугольников ODK, OCE и OBK находим:

$$\cos\alpha = \frac{DK}{OD} = \frac{20}{\sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{BO}{OK} = \frac{20}{\sqrt{10^2 + 20^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\gamma = \frac{AE}{OE} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Теперь вычислим проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x = -F_1 \sin\alpha \sin\beta + F_2 + F_4 \sin\gamma = -60 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + $$
$$+ 10 + 10\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$R_y = -F_1 \sin\alpha\cos\beta + F_3 = -60 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 10 = -30,$$

$$R_z = -F_1\cos\alpha + F_4\cos\gamma + F_5 = -60 \cdot \frac{2}{3} +$$
$$+ 10\sqrt{5}\,\frac{2}{\sqrt{5}} + 20 = 0.$$

Отсюда видим, что главный вектор $\overline{R}$ направлен по оси y влево и по величине равен 30 *кГ*.

Переходим к вычислению главного момента $\overline{M}_O$ относительно центра приведения O.

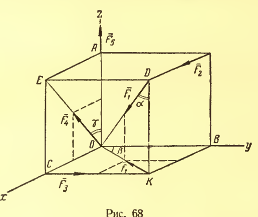


Рис. 68

Сила $\overline{F}_2$ параллельна оси x, а остальные силы пересекают эту ось, поэтому момент каждой силы относительно оси x равен нулю. Следовательно, $M_{Ox} = 0$.

Точно так же момент каждой из сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ относительно оси y равен нулю, а потому

$$M_{Oy} = m_y(\overline{F}_2) = z_2X_2 - x_2Z_2 = 20F_2 = 200 \text{ кГсм}.$$

Моменты сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ относительно оси z равны нулю, так как эти силы пересекают эту ось; следовательно,

$$M_{Oz} = m_z(\overline{F}_2) + mom_z(\overline{F}_3) = -20F_2 + 10F_3 = -100 \text{ кГсм}.$$

Так как $M_{Ox} = 0$, то главный момент M_O лежит в плоскости zOy и по величине равен

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = 100\sqrt{5} \text{ кГсм}.$$

Так как главный вектор и главный момент отличны от нуля, то необходимо выяснить, приводится ли данная система сил к динаме или к одной равнодействующей силе. Для этого вы-

числим скалярное произведение главного вектора и главного момента:

$$\overline{R}\cdot\overline{M}_O = R_x\cdot M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} = (-30)\cdot 200 = -6000\ кГ^2см.$$

Так как это произведение не равно нулю, то векторы $\overline{R}$ и $\overline{M}_O$ не перпендикулярны и, следовательно, данная система сил приводится к динаме.

Найдем точку, через которую проходит центральная ось данной системы сил, а также величину главного момента относительно этой точки.

Для этого построим главный вектор $\overline{R}$ и главный момент $\overline{M}_O$ по их проекциям на координатные оси и разложим главный момент по правилу параллелограмма на два составляющих момента $\overline{M'}$ и $\overline{M''}$, из которых $\overline{M'}$ направлен вдоль главного вектора, т. е. по оси y, а $\overline{M''}$ перпендикулярен к нему, т. е. направлен по оси z.

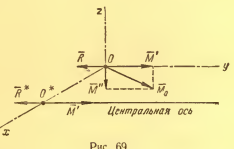


Рис. 69

Следовательно,

$$M' = |M_{Oy}| = 200\ кГсм, \quad M'' = |M_z| = 100\ кГсм \text{ (рис. 69).}$$

Пара, имеющая момент $\overline{M''}$, лежит в плоскости xOy, т. е. в одной плоскости с главным вектором $\overline{R}$, поэтому одну из сил $\overline{R'}$ этой пары можно выбрать равной по величине силе $\overline{R}$ и направленной прямо противоположно этой силе. Тогда вторая сила этой пары $\overline{R^*}$ будет приложена в точке O', лежащей на оси x, причем плечо пары будет равно

$$OO^* = \frac{M''}{R} = \frac{100}{30} \approx 3{,}3\ см.$$

Система, состоящая из силы $\overline{R}$ и пары $(\overline{R'}, \overline{R^*})$, очевидно, эквивалентна одной силе $\overline{R^*}$. Таким образом, заданная система сил эквивалентна силе $\overline{R^*}$ и паре с моментом $\overline{M'}$, причем $\overline{M'} \parallel \overline{R^*}$. Следовательно, заданная система сил приводится к динаме, а точка O^* находится на центральной оси.

$\overline{M'}$ есть наименьший главный момент данной системы сил, т. е.

$$M_{min} = 200 \ кГсм.$$

Эту же задачу можно решить другим способом.

После того, как определим проекции на координатные оси главного вектора и главного момента, можно составить уравнения центральной оси данной системы сил:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}.$$

Подставляя сюда значения M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} и R_x, R_y, R_z получим:

$$\frac{z \cdot (-30)}{0} = \frac{200}{-30} = \frac{-100 - [x \cdot (-30)]}{0},$$

откуда

$$z = 0 \text{ и } 30x - 100 = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{10}{3}.$$

Эти равенства показывают, что центральная ось проходит через точку $O^* \left(\frac{10}{3};\ 0;\ 0\right)$ и параллельна оси y. Чтобы найти величину наименьшего главного момента, достаточно скалярное произведение $\overline{R} \cdot \overline{M}_O$ разделить на величину главного вектора, т. е.

$$M_{min} = \frac{\overline{R} \cdot \overline{M}_O}{R} = \frac{6\,000}{30} = 200 \ кГсм.$$

§ 3. Равновесие системы сил в пространстве

Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, в общем случае необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\overline{R}$ этой системы сил и ее главный момент относительно произвольно выбранного центра O были равны нулю, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \overline{R} &= \Sigma \overline{F}_i = 0, \\ \overline{M}_O &= \Sigma \overline{m}_O(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Учитывая формулы (30), выражающие проекции главного вектора и проекции главного момента на координатные оси, заключаем, что предыдущие два векторных равенства эквивалентны следующим шести скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \Sigma X_i = 0, \\ R_y &= \Sigma Y_i = 0, \\ R_z &= \Sigma Z_i = 0, \\ M_{Ox} &= \Sigma m_x(\overline{F}_i) = 0, \\ M_{Oy} &= \Sigma m_y(\overline{F}_i) = 0, \\ M_{Oz} &= \Sigma m_z(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Эти шесть уравнений выражают условия равновесия системы сил в общем случае.

Если все силы, приложенные к рассматриваемому твердому телу, параллельны между собой, то, направляя ось z параллельно этим силам, будем иметь три уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma Z_i = 0, \\ &\Sigma m_x(\overline{F}_i) = 0, \\ &\Sigma m_y(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи на равновесие несвободного твердого тела под действием пространственной системы сил, не сходящихся в одной точке.

По расположению линий действия всех сил, приложенных к рассматриваемому телу, включая и реакции связей, такие задачи можно разделить на два типа.

I. Равновесие системы параллельных сил.

II. Равновесие системы сил в общем случае.

ЗАДАЧИ ТИПА I

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

(задачи 246—252)

Пример 38

Ось штатива закреплена в центре тяжести равносторонней треугольной подставки ABC, сторона которой равна a. Определить давление подставки на горизонтальную опорную плоскость в точках A, B, C, если стержень DE направлен параллельно стороне AB, вес штатива равен Q и направлен по оси DO, а к горизонтальному стержню $DE = b$, весом которого можно пренебречь, подвешен в точке E груз весом P (рис. 70).

Решение

Обозначим реакции опорной плоскости в точках A, B и C через $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{N}_C$. Так как штатив опирается в точках A, B и C на горизонтальную плоскость свободно, то реакции $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{N}_C$ направлены по нормалям к этой плоскости, а потому они вертикальны.

Направим координатные оси, как указано на рисунке, выбрав начало координат O_1 в середине стороны AB. Тогда силы $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{N}_A$, $\overline{N}_B$, $\overline{N}_C$ будут параллельны оси z. Так как эти силы не лежат в одной плоскости, то можно составить уравнения равновесия для этих сил, приравняв нулю сумму их проекций на ось z и сумму их моментов относительно осей x и y.

Силы $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ пересекают ось y, поэтому их моменты относительно этой оси равны нулю.

Точно так же силы $\overline{Q}$ и $\overline{N}_C$ пересекают ось x, поэтому моменты сил $\overline{Q}$ и $\overline{N}_C$ относительно оси x равны нулю. Следовательно, уравнения равновесия запишутся так:

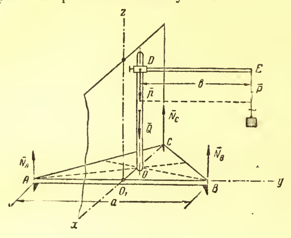


Рис. 70

$$N_A + N_B + N_C - P - Q = 0,$$
$$m_x(\overline{N}_A) + m_x(\overline{N}_B) + m_x(\overline{P}) = 0,$$
$$m_y(\overline{N}_C) + m_y(\overline{P}) + m_y(\overline{Q}) = 0.$$

Но силы $\overline{N}_A$ и $\overline{N}_B$ лежат в плоскости zOy, поэтому момент силы $\overline{N}_A$ относительно оси x равен по величине моменту этой силы относительно точки O_1 (§ 1, гл. IV), т. е.

$$m_x(\overline{N}_A) = -N_A \cdot AO_1 = -N_A \cdot \frac{a}{2},$$
$$m_x(\overline{N}_B) = N_B \cdot O_1B = N_B \cdot \frac{a}{2}.$$

Точно так же сила $\overline{P}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси x, потому момент этой силы относительно оси x равен по величине моменту этой силы относительно точки O, т. е.

$$m_x(\overline{P}) = -P \cdot DE = -P \cdot b.$$

Аналогично находим моменты сил $\overline{N}_C$ и $\overline{Q}$ относительно оси y. Эти силы лежат в плоскости zOx, а потому

$$m_y(\overline{N}_C) = N_C \cdot O_1C$$

и

$$m_y(\overline{Q}) = -Q \cdot O_1O.$$

Чтобы найти момент силы $\overline{P}$ относительно оси y, спроектируем силу $\overline{P}$ на плоскость zO_1x и полученную проекцию $\overline{p}$ умножим на ее плечо относительно точки O_1. Тогда будем иметь:

$$m_y(\overline{P}) = -p \cdot O_1O = -P \cdot O_1O.$$

Уравнения равновесия принимают теперь следующий вид:

$$1)\ N_A + N_B + N_C = P + Q,$$

$$2)\ -N_A \cdot \frac{a}{2} + N_B \cdot \frac{a}{2} = P \cdot b,$$

$$3)\ N_C \cdot O_1C = (P + Q)\, O_1O.$$

Из третьего уравнения находим:

$$N_C = \frac{O_1O}{O_1C}(P + Q).$$

Но

$$\frac{O_1O}{O_1C} = \frac{1}{3},$$

так как O — точка пересечения медиан треугольника ABC, а потому

$$N_C = \frac{P + Q}{3}.$$

Подставив значение N_C в первое и второе уравнения, получим:

$$N_A + N_B = P + Q - N_C = \frac{2}{3}(P + Q),$$

$$-N_A + N_B = 2P\frac{b}{a}.$$

Сложив эти два уравнения, находим:

$$2N_B = \frac{2}{3}(P + Q) + 2P\frac{b}{a},$$

откуда

$$N_B = \frac{1}{3}(P + Q) + P\frac{b}{a}$$

и

$$N_A = N_B - 2P\frac{b}{a} = \frac{P + Q}{3} - P\frac{b}{a}.$$

Итак

$$N_A = P\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a}\right) + \frac{Q}{3},$$

$$N_B = \frac{1}{3}(P + Q) + P\frac{b}{a}, \quad N_C = \frac{P + Q}{3}.$$

Так как реакция N_A не может быть отрицательной, то для равновесия штатива необходимо, чтобы

$$P\left(\frac{1}{3}-\frac{b}{a}\right)+\frac{Q}{3}>0.$$

В противном случае штатив будет опрокидываться вокруг BC.

ЗАДАЧИ ТИПА II

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ СИЛ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Задачи этого типа можно подразделить по характеру связей на шесть основных групп.

Первая группа

Задачи о равновесии тела, закрепленного на оси, свободно проходящей через два цилиндрических подшипника

(задачи 257, 276, 280)

Пример 39

Ворот состоит из барабана радиусом r и колеса радиусом R, вращающихся на общем валу AB, который укреплен в двух цилиндрических подшипниках A и B.

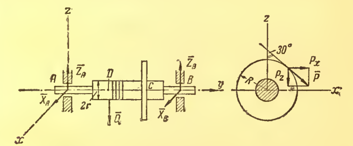


Рис. 71

На барабан навернута веревка, к концу которой подвешен груз весом Q. Колесо также обмотано веревкой, к концу которой приложена сила $\bar{P}$, составляющая с вертикалью угол, равный 30°.

Зная вес груза $\bar{Q}$, найти величину силы $\bar{P}$ при равновесии, а также реакции в подшипниках A и B, если $AB=l$, $AC=a$, $AD=b$ (рис. 71).

Решение

Ось y направим вдоль оси вращения вала, а ось z — по вертикали вверх; начало координат выберем в точке A. Подшипники A и B не препятствуют перемещению ворота вдоль оси y, а потому реакции $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ этих подшипников перпендикулярны к данной оси, т. е. каждая из этих реакций лежит в плоскости, перпендикулярной к оси y.

Так как направления реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ неизвестны, то разложим каждую из этих реакций на две составляющие, параллельные осям x и z, т. е.

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Z}_A, \quad \overline{R}_B = \overline{X}_B + \overline{Z}_B.$$

Таким образом, в данной задаче мы имеем четыре неизвестных реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$. Шесть сил $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{X}_B$, приложенных к вороту, находятся в равновесии.

Так как все эти силы перпендикулярны к оси y, то проекция каждой из них на эту ось равна нулю и уравнение проекций на ось y превращается в тождество. Следовательно, в данной задаче можно составить только пять уравнений равновесия, из которых можно найти четыре неизвестных реакции и искомую силу P.

Составим пять уравнений равновесия:

1) $X_B + X_A + P \cdot \cos 60° = 0$,
2) $Z_B + Z_A - P \cos 30° = 0$,
3) $m_x(\overline{Q}) + m_x(\overline{P}) + m_x(\overline{Z}_B) = 0$,
4) $m_y(\overline{Q}) + m_y(\overline{P}) = 0$,
5) $m_z(\overline{P}) + m_z(\overline{X}_B) = 0$.

Моменты силы $\overline{P}$ относительно осей x и z найдем по формулам (29). Но $P_y = 0$; кроме того, так как точка приложения силы $\overline{P}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси y и отстоящей от начала координат на расстоянии, равном AC, то координата y этой точки равна AC. Следовательно,

$$m_x(\overline{P}) = AC \cdot (-P \cos 30°) = -\frac{P\sqrt{3}}{2} AC,$$

$$m_z(\overline{P}) = -AC \cdot P \cos 60° = -\frac{P}{2} \cdot AB.$$

Другие моменты, входящие в уравнения равновесия, легко определить из рисунка.

Теперь уравнения равновесия перепишутся так:

1) $X_A + X_B + P \cos 60° = 0$,
2) $Z_A + Z_B - Q - P \cos 30° = 0$,
3) $P \cdot R - Q \cdot r = 0$,

4) $-P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a-Q\cdot b+Z_B\cdot l=0,$

5) $\frac{-P}{2}\cdot a-X_B\cdot l=0.$

Из третьего уравнения (3) находим:

$$P=\frac{r}{R}Q.$$

Из четвертого и пятого уравнений имеем:

$$X_B=-\frac{P}{2}\frac{a}{l},\quad Z_B=Q\frac{b}{l}+P\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{l}.$$

Подставив найденные значения X_B и Z_B в первые два уравнения равновесия, находим из этих уравнений:

$$Z_A=Q+P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-Z_B=Q+P\frac{\sqrt{3}}{2}-Q\frac{b}{l}-$$

$$-P\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{l}=Q\left(1-\frac{b}{l}\right)+P\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)=$$

$$=Q\left(\frac{l-b}{l}\right)+\frac{r}{R}\frac{\sqrt{3}}{2}Q\left(\frac{l-a}{l}\right)=$$

$$=\frac{Q}{l}\cdot\left[l-b+\frac{r\sqrt{3}}{2R}(l-a)\right],$$

$$X_A=-\frac{P}{2}-X_B=\frac{P}{2}\frac{a}{l}-\frac{P}{2}=$$

$$=\frac{P}{2l}(a-l)=-\frac{P}{2l}(l-a).$$

Знаки минус, полученные для значений сил X_A и X_B, указывают на то, что направления этих сил противоположны направлениям, изображенным на рисунке.

Вторая группа

Задачи о равновесии тела, закрепленного на оси, один конец которой проходит свободно через цилиндрический подшипник, а другой закреплен при помощи упорного подшипника, препятствующего перемещению тела в направлении оси вращения

(задачи 253, 254, 256, 258)

Пример 40

На горизонтальном валу AB насажено зубчатое колесо C радиусом R_1 и колесо D радиусом R_2. К колесу C по направлению касательной приложена вертикальная сила $\overline{P}$, а к колесу D по направлению касательной — горизонтальная сила $\overline{Q}$. Найти силу

Q и реакции подшипников A и B при равновесии, если соответствующие размеры указаны на рис. 72.

Решение

Начало координат выберем в точке A, ось y направим по оси вала AB, а ось z — по вертикали вверх; тогда ось x будет направлена, как указано на рисунке.

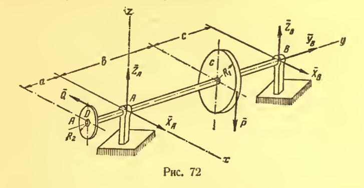


Рис. 72

Вал AB закреплен при помощи двух подшипников A и B, причем подшипник A не препятствует перемещению вала в направлении оси y. Поэтому составляющая реакции $\overline{R}_A$ подшипника A, направленная вдоль оси y, равна нулю, т. е. реакция $\overline{R}_A$ перпендикулярна к оси y и лежит в плоскости zAx. Но направление силы реакции $\overline{R}_A$ в этой плоскости неизвестно, а потому разложим ее на две составляющие, направленные по осям x и z, и обозначим эти составляющие X_A и Z_A, т. е.

$$\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Z}_A.$$

Упорный подшипник B препятствует перемещению вала вдоль оси y, а потому реакция $\overline{R}_B$ этого подшипника может иметь составляющую, направленную по оси y, которую обозначим $\overline{Y}_B$. Две другие составляющие реакции $\overline{R}_B$, параллельные осям x и z, обозначим $\overline{X}_B$ и $\overline{Z}_B$. Тогда

$$\overline{R}_B = \overline{X}_B + \overline{Z}_B + \overline{Y}_B.$$

Следовательно, в случае равновесия твердого тела, закрепленного при помощи двух подшипников A и B, из которых один является *упорным*, имеем пять неизвестных реакций $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$. Но число уравнений равновесия, в которые входят эти неизвестные реакции, также равно пяти, так как в уравнение моментов относительно оси вращения y силы X_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B не войдут (все эти силы пересекают ось y, и, следова-

тельно, их моменты относительно этой оси равны нулю). Искомую силу Q найдем из шестого уравнения равновесия, т. е. из уравнения моментов относительно оси y:

$$m_y(\overline{P})+m_y(\overline{Q})=0,$$

или

$$-Q\cdot R_2+P\cdot R_1=0,$$

откуда

$$Q=\frac{R_1}{R_2}P.$$

Составим теперь остальные пять уравнений равновесия, т. е. уравнения проекций на оси x, y, z и уравнения моментов относительно осей x и z.

При этом необходимо иметь в виду, что силы $\overline{Z}_A$ и $\overline{X}_A$ приложены в начале координат, поэтому моменты их относительно координатных осей равны нулю. Кроме того, силы $\overline{P}$ и $\overline{Z}_B$ параллельны оси z, а потому

$$m_z(\overline{P})=m_z(\overline{Z}_B)=0.$$

Точно так же силы $\overline{Q}$ и $\overline{X}_B$ параллельны оси x, а потому

$$m_x(\overline{Q})=m_x(\overline{X}_B)=0.$$

Таким образом, пять уравнений равновесия запишутся так:

1) $X_A+X_B-Q=0,$
2) $Y_B=0,$
3) $Z_A+Z_B-P=0,$
4) $m_x(\overline{P})+m_x(\overline{Z}_B)=0,$
5) $m_z(\overline{Q})+m_z(\overline{X}_B)=0.$

Но

$$m_x(\overline{Z}_B)=Z_B(b+c),$$
$$m_z(\overline{X}_B)=-X_B(b+c).$$

Чтобы найти момент силы $\overline{P}$ относительно оси x, достаточно силу $\overline{P}$ спроектировать на плоскость zOy и умножить полученную проекцию p на ее плечо относительно точки A, т. е.

$$m_x(\overline{P})=-p\cdot AC=-p\cdot b=-P\cdot b.$$

Аналогично найдем, что

$$m_z(\overline{Q})=-Q\cdot a.$$

Теперь уравнения равновесия перепишутся так:

1) $Z_A+Z_B=P,$
2) $X_A+X_B=Q,$

3) $Y_B = 0$,
4) $Q \cdot a = -X_B(b+c)$,
5) $P \cdot b = Z_B(b+c)$.

Решая эту систему уравнений, находим:

$$Z_B = \frac{b}{b+c}P, \quad X_A = Q - X_B = \left(\frac{b+c+a}{b+c}\right)Q.$$

$$X_B = -\frac{a}{b+c}Q, \quad Z_A = P - Z_B = \frac{c}{b+c}P.$$

Третья группа

Задачи о равновесии тела, имеющего ось вращения, закрепленную при помощи подпятника и подшипника

(задачи 270, 273, 277)

Пример 41

Груз весом $Q = 50$ *кГ* поднимается при помощи вертикального ворота. Определить горизонтальную силу $\overline{P}$, приложенную к рукоятке ворота под углом $\alpha = 30°$, а также реакции подпятника A и подшипника B при равновесии, если веревка EK параллельна рукоятке CD и если известны: вес барабана $G = 20$ *кГ*, радиус барабана $r = 10$ *см*, расстояния $a = 25$, $b = 35$, $c = 15$ *см* и $CD = l = 50$ *см* (рис. 73).

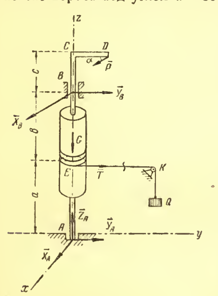


Рис. 73

Решение

Координатные оси выберем, как указано на рисунке, причем ось y — параллельна CD.

Сила натяжения $\overline{T}$ веревки EK, приложенная к вороту в точке E, направлена по EK и по величине равна Q, т. е. $T = Q$. Подпятник препятствует перемещению ворота по вертикали вниз, а потому полная реакция подпятника имеет вертикальную составляющую, направленную по вертикали вверх; обозначим ее $\overline{Z}_A$. Направление же горизонтальной составляющей реакции подпятника (реакции, возникающей от его стенок) неизвестно и поэтому разложим ее по координатным осям x и y и обозначим эти составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$.

Подшипник B не препятствует перемещению ворота вдоль оси z, а потому составляющая полной реакции подшипника вдоль этой оси равна нулю, т. е. полная реакция подшипника перпендикулярна к оси z.

Обозначим составляющие этой реакци, параллельные координатным осям x и y, через $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$. Следовательно, в случае равновесия твердого тела, закрепленного при помощи подпятника и подшипника, имеем пять неизвестных опорных реакций X_B, Y_B, X_A, Y_A, Z_A. Но число уравнений равновесия, в которые входят эти неизвестные реакции, также равно пяти, так как в уравнение моментов относительно оси вращения (оси z) эти реакции не войдут (силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ пересекают ось z, и моменты их относительно этой оси равны нулю). Искомую силу $\overline{P}$ найдем из шестого уравнения равновесия, т. е. из уравнения моментов относительно оси z. Так как сила $\overline{G}$ параллельна оси z, то

$$m_z(\overline{G}) = 0.$$

Следовательно, будем иметь:

$$m_z(\overline{P}) + m_z(\overline{T}) = 0.$$

Но

$$m_z(\overline{T}) = T \cdot r = Q \cdot r$$

и

$$m_z(\overline{P}) = -P \cdot CD \cdot \sin 30^\circ = -P \cdot \frac{l}{2},$$

а потому

$$Q \cdot r - P \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

откуда

$$P = \frac{2r}{l} \cdot Q = 20 \text{ } \kappa\Gamma.$$

Для того чтобы найти реакции X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, приравняем нулю сумму проекций на координатные оси всех сил, приложенных к вороту, и сумму их моментов относительно осей x и y. Моменты силы $\overline{P}$ относительно осей x и y находим по формулам (29):

$$m_x(\overline{P}) = (a+b+c) \cdot \frac{P \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

$$m_y(\overline{P}) = (a+b+c) \cdot \frac{P}{2}.$$

Следовательно, уравнения равновесия имеют вид:

$$1) \; X_A + X_B + \frac{P}{2} = 0,$$

$$2)\qquad Y_A+Y_B+Q-P\frac{\sqrt{3}}{2}=0,$$

$$3)\ Z_A-G=0,$$

$$4)\ (a+b+c)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}P-Y_B(a+b)-Q\cdot a=0,$$

$$5)\ (a+b+c)\cdot\frac{P}{2}+X_B(a+b)=0.$$

Из последних трех уравнений находим:

$$Z_A=G=20\ кГ,$$

$$Y_B=-Q\cdot\frac{a}{a+b}+P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(a+b+c)}{a+b}=$$

$$=Q\left[\frac{r\sqrt{3}}{l}\cdot\frac{(a+b+c)}{(a+b)}-\frac{a}{a+b}\right]=0{,}8\ кГ.$$

$$X_B=-\frac{(a+b+c)}{2(a+b)}P=-\frac{(a+b+c)}{2(a+b)}\cdot\frac{2r}{l}Q=$$

$$=-\frac{r(a+b+c)}{l(a+b)}Q=-12{,}5\ кГ.$$

Подставив найденные значения X_B и Y_B в первые два уравнения равновесия, находим из них реакции X_A и Y_A:

$$X_A=-\frac{P}{2}-X_B=\frac{r}{l}\frac{(a+b+c)}{(a+b)}Q-$$

$$-\frac{r}{l}Q=\frac{r}{l}Q\cdot\left[\frac{a+b+c}{a+b}-1\right]=$$

$$=\frac{r}{l}Q\left(\frac{c}{a+b}\right)=2{,}5\ кГ.$$

$$Y_A=-Y_B-Q+\frac{\sqrt{3}}{2}P=-Q+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2r}{l}Q-Q\left[\frac{\sqrt{3}r(a+b+c)}{l(a+b)}-\frac{a}{a+b}\right]=$$

$$=-Q\left[\left(\frac{a+b+c}{a+b}-1\right)\frac{\sqrt{3}r}{l}+1-\frac{a}{a+b}\right]=$$

$$=-Q\cdot\left[\frac{c}{a+b}\cdot\frac{\sqrt{3}r}{l}+\frac{b}{a+b}\right]=$$

$$=-\frac{Q}{a+b}\left(\frac{\sqrt{3}r}{l}c+b\right)=-33{,}5\ кГ.$$

Четвертая группа

Задачи о равновесии тела, имеющего две неподвижные точки
(задачи 253, 254, 256, 258)

Если твердое тело закреплено на оси AB, которая может вращаться в двух упорных подшипниках A и B, то в одном из этих подшипников, кроме реакции, перпендикулярной к оси вращения, может возникать и продольная реакция, направленная по оси вращения (рис. 74). При этом необходимо иметь в виду, что продольная реакция возникает в том подшипнике, который воспринимает давление, направляемое вдоль оси вращения и вызываемое действием приложенных к телу заданных сил. Если продольная составляющая главного вектора заданных сил направлена на рис. 74 по оси AB вправо, то очевидно, подшипник A

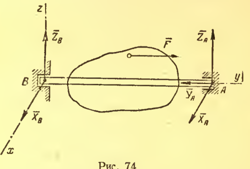


Рис. 74

будет воспринимать продольное деление, и следовательно, в этом подшипнике возникает продольная реакция. Если все заданные силы, приложенные к твердому телу, лежат в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, то вызываемое этими силами продольное давление отсутствует, и потому продольные реакции обоих подшипников равны нулю.

Пример 42

В наклонном вороте известны: вес груза Q, радиусы R и r колеса и вала, угол α оси вала с вертикалью и расстояния a, b и $AB = l$.

Определить при равновесии реакции упорных подшипников A и B и горизонтальную силу $\overline{P}$, приложенную к колесу в точке C и направленную по касательной к колесу (рис. 75).

Решение

Выберем за начало координат точку A, ось y направим по оси вала, а ось z направим в вертикальной плоскости перпенди-

кулярно оси y. Тогда ось x будет направлена по горизонтали, как указано на рисунке.

Так как подшипники A и B являются упорными, а вал AB оказывает давление в направлении оси y на подшипник A, то в подшипнике A возникает продольная реакция, направленная по оси y от A к B. Таким образом, в точке A имеем три реакции X_A, Y_A, Z_A, направленные по координатным осям. При заданных силах $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, приложенных к валу, последний, очевидно, не будет давить на подшипник B в направлении оси y, а потому продольная реакция в точке B равна нулю ($Y_B=0$), и, следо-

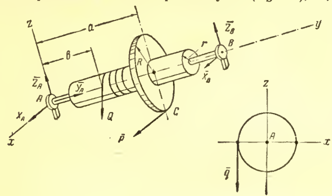


Рис. 75

вательно, в этой точке имеем только две реакции $\overline{X}_B$ и $\overline{Z}_B$, параллельные осям x и z. Таким образом, в данной задаче имеем всего шесть неизвестных сил: искомую силу P и пять реакций X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B. Так как число уравнений равновесия также равно шести, то задача является статически определимой.

При составлении шести уравнений равновесия (трех уравнений проекций на оси x, y и z и трех уравнений моментов относительно этих осей) необходимо учесть, что силы X_A, Y_A, Z_A проходят через начало координат, поэтому момент каждой из этих сил относительно каждой координатной оси равен нулю. Точно так же силы X_B, Z_B пересекают ось y, а потому

$$m_y(\overline{X}_B)=m_y(\overline{Z}_B)=0.$$

Наконец, силы $\overline{X}_B$ и $\overline{P}$ параллельны оси x, а сила $\overline{Z}_B$ параллельна оси z, поэтому

$$m_x(\overline{X}_B)=m_x(\overline{P})=0, \quad m_z(\overline{Z}_B)=0.$$

Следовательно, уравнения равновесия имеют вид:

$$1)\ X_A+X_B+P=0,$$
$$2)\ Y_A-Q\cos\alpha=0,$$

$$3)\ Z_A + Z_B - Q\sin\alpha = 0,$$
$$4)\ m_x(\overline{Q}) + m_x(\overline{Z}_B) = 0,$$
$$5)\ m_y(\overline{P}) + m_y(\overline{Q}) = 0,$$
$$6)\ m_z(\overline{Q}) + m_z(\overline{P}) + m_z(\overline{X}_B) = 0.$$

Кроме того,

$$m_x(\overline{Z}_B) = Z_B l, \quad m_x(\overline{Q}) = -Q\cdot\sin\alpha\cdot b,$$
$$m_z(\overline{X}_B) = -X_B l, \quad m_y(\overline{P}) = -P\cdot R,$$
$$m_y(\overline{Q}) = Q\sin\alpha\cdot r, \quad m_z(\overline{Q}) = -Q\cdot r\cos\alpha,$$
$$m_z(\overline{P}) = -P\cdot a.$$

Теперь уравнения равновесия перепишутся так:

$$1)\ X_A + X_B = -P,$$
$$2)\ Y_A = Q\cdot\cos\alpha,$$
$$3)\ Z_A + Z_B = Q\sin\alpha,$$
$$4)\ -Q\sin\alpha\cdot b + Z_B l = 0,$$
$$5)\ -P\cdot R + Q\sin\alpha\cdot r = 0,$$
$$6)\ -P\cdot a - Q\cos\alpha\cdot r - X_B l = 0.$$

Решая эту систему уравнений, из второго уравнения находим:

$$Y_A = Q\cdot\cos\alpha,$$

из четвертого уравнения

$$Z_B = \frac{b\sin\alpha}{l}Q,$$

из третьего уравнения

$$Z_A = Q\sin\alpha - Z_B = Q\sin\alpha\left(1 - \frac{b}{l}\right) = \frac{(l-b)}{l}Q\sin\alpha,$$

из пятого уравнения

$$P = \frac{r}{R}\sin\alpha\cdot Q,$$

из шестого уравнения

$$X_B = -P\frac{a}{l} - Q\cos\alpha\cdot\frac{r}{l} = -\frac{a}{l}\frac{r}{R}Q\sin\alpha - Q\frac{r}{l}\cos\alpha =$$
$$= -Q\frac{r}{l}\left(\frac{a}{R}\sin\alpha + \cos\alpha\right),$$

из первого уравнения

$$X_A = -P - X_B = Q\frac{r}{l}\left(\frac{a}{R}\sin\alpha + \cos\alpha\right) -$$
$$-\frac{r}{R}\sin\alpha\cdot Q = \frac{Qr}{l}\left(\frac{a}{R}\sin\alpha + \cos\alpha - \frac{l}{R}\sin\alpha\right),$$

или

$$X_A = \frac{Qr}{l}\left[\left(\frac{a-l}{R}\right)\sin\alpha + \cos\alpha\right)\right].$$

Знак минус, полученный для силы X_B, указывает на то, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рисунке.

Пример 43

Полка вагона $ABCD$, которая может вращаться вокруг оси AB, удерживается в горизонтальном положении стержнем ED, закрепленным при помощи шарнира E. Общий вес полки и лежащего на ней груза равен $P = 80$ *кГ* и приложен в центре прямоугольника $ABCD$. Размеры: $AB = 150$ *см*, $AD = 60$ *см*, $AK = BH = 25$ *см*, $DE = 75$ *см*. Определить реакцию $\overline{S}$ стержня DE, пренебрегая его весом, и реакции петель K и H (рис. 76).

Решение

Начало координат выберем в точке H, ось y направим вдоль оси вращения AB, а ось z — по вертикали вверх. Тогда ось x будет направлена, как указано на рисунке. Так как весом

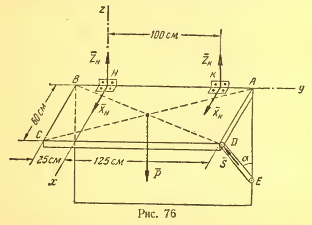


Рис. 76

стержня DE по условию задачи можно пренебречь, то реакция этого стержня $\overline{S}$, приложенная к полке в точке D, направлена вдоль стержня. Петли можно рассматривать как упорные подшипники. Так как силы $\overline{P}$ и $\overline{S}$, приложенные к полке, перпендикулярны оси y (сила $\overline{S}$ лежит в плоскости треугольника ADE, параллельной плоскости zHx), то полка не оказывает давления на петли в направлении этой оси, и, следовательно, продольные реакции в точках H и K равны нулю, т. е. реакции $\overline{R}_H$ и $\overline{R}_K$ перпендикулярны к оси y. Разложим каждую из этих реакций на две составляющие, параллельные осям x и z, обозначим эти составляющие X_H, Z_H, X_K и Z_K.

Таким образом, в данной задаче имеется пять неизвестных сил: X_H, Z_H, X_K, Z_K, S. Для определения этих сил можно составить пять уравнений равновесия (шестое уравнение равновесия — уравнение проекций на ось y — превращается в тождество, так как все силы, приложенные к полке, перпендикулярны к оси y).

Составляя пять уравнений равновесия и обозначая угол между силой $\overline{S}$ и осью z через α, получим:

$$1)\ X_H + X_K + S\cdot\sin\alpha = 0,$$
$$2)\ Z_H + Z_K + S\cdot\cos\alpha - P = 0,$$
$$3)\ m_x(\overline{P}) + m_x(\overline{S}) + m_x(\overline{Z}_K) = 0,$$
$$4)\ m_y(\overline{P}) + m_y(\overline{S}) = 0,$$
$$5)\ m_z(\overline{X}_K) + m_z(\overline{S}) = 0.$$

Для определения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рассмотрим прямоугольный треугольник ADE, из которого имеем:

$$\sin\alpha = \frac{AD}{ED} = \frac{60}{75} = \frac{4}{5} \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Далее, как видно из рисунка,

$$m_x(\overline{Z}_K) = Z_K \cdot HK = 100 Z_K$$

и

$$m_z(\overline{X}_K) = -X_K \cdot HK = -100 X_K.$$

Точно так же

$$m_x(\overline{P}) = -P\cdot\frac{HK}{2} = -50P$$

и

$$m_y(\overline{P}) = P\cdot\frac{AD}{2} = 30P.$$

Моменты силы $\overline{S}$ относительно осей x, y, z вычисляем по формулам (29):

$$m_x(\overline{S}) = y_D \cdot S_Z = HA \cdot S\cos\alpha = 125\cdot\frac{3}{5}S = 75S,$$
$$m_y(\overline{S}) = -x_D S_Z = -AD\cdot S\cos\alpha = -60\cdot\frac{3}{5}S = -36S,$$
$$m_z(\overline{S}) = -y_D S_X = -HA\cdot S\sin\alpha =$$
$$= -125\cdot\frac{4}{5}S = -100S.$$

Следовательно, уравнения равновесия перепишутся так:

$$1)\ X_H + X_K + \frac{4}{5}S = 0,$$
$$2)\ Z_H + Z_K - 80 + \frac{3}{5}S = 0,$$

$$3)\ -50\cdot 80+100Z_K+75S=0,$$
$$4)\ 30\cdot 80-36S=0,$$
$$5)\ -100X_K-100S=0.$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных X_K, X_H, Z_H, Z_K, S, из четвертого уравнения находим

$$S=\frac{2400}{36}=\frac{200}{3}\ \kappa\Gamma,$$

из пятого уравнения

$$X_K=-S=-\frac{200}{3}\ \kappa\Gamma,$$

из третьего уравнения

$$Z_K=\frac{4000-75S}{100}=40-\frac{3}{4}\cdot\frac{200}{3}=-10\ \kappa\Gamma.$$

Из первых двух уравнений найдем соответственно:

$$X_H=-\frac{4}{5}S-X_K=-\frac{4}{5}\cdot\frac{200}{3}+\frac{200}{3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{200}{3}=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}\ \kappa\Gamma.$$

$$Z_H=80-\frac{3}{5}S-Z_K=80-\frac{3}{5}\cdot\frac{200}{3}+10=50\ \kappa\Gamma.$$

Знаки минусы, полученные для значений сил Z_K и X_K, указывают на то, что эти силы имеют направления, противоположные изображенным на рисунке.

Пятая группа

Задачи о равновесии твердого тела, имеющего одну из опор в виде сферического шарнира
(задачи 265, 267)

Пример 44

Квадратная пластинка $ABCD$ со стороной $a=30$ *см* и весом $P=5$ *кГ* закреплена в точке A при помощи сферического шарнира, а в точке B при помощи цилиндрического подшипника. Сторона AB горизонтальна. В точке E пластинка опирается на острие. В точке H к пластинке приложена сила $\overline{F}$, параллельная стороне AB. Найти реакции в точках A, B и E, если $CE=ED$, $BH=10$ *см*, $F=10$ *кГ* и если пластинка образует с горизонтальной плоскостью угол $\alpha=30°$ (рис. 77).

Решение

Возьмем начало координат в точке A, а координатные оси направим, как указано на рисунке.

Реакция цилиндрического подшипника B перпендикулярна к оси x, поэтому в точке B будем иметь две реакции, парал-

лельные осям y и z; обозначим их $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$. Направление реакции сферического шарнира A неизвестно; разложив эту реакцию по координатным осям, будем иметь в точке A три неизвестные силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$.

Реакция $\overline{R}_E$ опоры E перпендикулярна к плоскости $ABCD$ пластинки.

Таким образом, в данной задаче мы имеем шесть неизвестных реакций: $\overline{R}_E$, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$. Силы X_A, Y_A, Z_A проходят

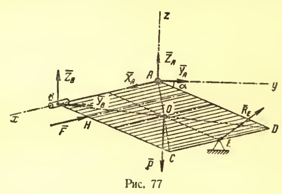


Рис. 77

через начало координат, поэтому моменты каждой из этих сил относительно координатных осей равны нулю. Сила $\overline{F}$ параллельна оси x, поэтому

$$m_x(\overline{F})=0.$$

Сила $\overline{P}$ параллельна оси z; следовательно,

$$m_z(\overline{P})=0.$$

Кроме того, силы $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$ пересекают ось x, причем сила Y_B параллельна оси y, а сила $\overline{Z}_B$ параллельна оси z, а потому

$$m_z(\overline{Z}_B)=0,\quad m_y(\overline{Y}_B)=0,$$

и

$$m_x(\overline{Y}_B)=m_x(\overline{Z}_B)=0.$$

До того, как перейти к вычислению моментов силы $\overline{R}_E$ относительно осей x, y, z, найдем углы между силой $\overline{R}_E$ и этими осями. Так как сила $\overline{R}_E$ перпендикулярна плоскости $ABCD$ пластинки, а ось z перпендикулярна к горизонтальной плоскости, то угол между силой $\overline{R}_E$ и осью z равен углу между этими плоскостями, т. е. углу α. Кроме того, ось x принадлежит плоскости $ABCD$, а потому угол между силой $\overline{R}_E$ и осью x ра-

вен 90°. Отсюда также следует, что угол между силой $\overline{R}_E$ и осью y равен углу $(90° - \alpha)$.

Моменты сил $\overline{P}$ и $\overline{R}_E$ относительно координатных осей найдем по формулам (29); для этого вычислим сначала координаты точек E и O:

$$x_E = \frac{a}{2},\ y_E = a\cos\alpha,\ z_E = -a\sin\alpha,$$

$$x_0 = \frac{a}{2},\ \ y_0 = \frac{a}{2}\cos\alpha,\ \ z_0 = -\frac{a}{2}\sin\alpha.$$

Тогда

$$m_x(\overline{R}_E) = a\cos\alpha R_{Ez} - (-a\sin\alpha) R_{Ey} = aR_E,$$

$$m_y(\overline{R}_E) = \frac{-a\sqrt{3}}{4} R_E \text{ и } m_z(\overline{R}_E) = \frac{a}{4} R_E.$$

Аналогично найдем, что

$$m_x(\overline{P}) = -\frac{a}{2}\cos\alpha \cdot P$$

и

$$m_y(\overline{P}) = \frac{a}{2} \cdot P.$$

Уравнения равновесия запишутся теперь так:

$$1)\ X_A - F = 0,$$

$$2)\ Y_A + Y_B + \frac{1}{2} R_E = 0,$$

$$3)\ Z_A + Z_B + \frac{\sqrt{3}}{2} R_E - 5 = 0,$$

$$4)\ a \cdot R_E - \frac{a}{2}\cos\alpha \cdot P = 0,$$

$$5)\ \frac{-a\sqrt{3}}{4} R_E + F \cdot BH\sin\alpha + P\frac{a}{2} - Z_B \cdot a = 0,$$

$$6)\ \frac{a}{4} R_E + F \cdot BH\cos\alpha + a \cdot Y_B = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим из первого уравнения:

$$X_A = F = 5\ \text{к}\Gamma,$$

из четвертого уравнения:

$$R_E = \frac{P\cdot\cos\alpha}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}16\ \text{к}\Gamma,$$

из шестого уравнения:

$$Y_B = -\frac{R_E}{4} - F\cdot\frac{BH}{a}\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{16} - 10\cdot\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -5\sqrt{3}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{3}\right) = -5\sqrt{3}\cdot\frac{19}{48} \approx -3{,}43\ \text{к}\Gamma,$$

из второго уравнения:

$$Y_A = -Y_B - \frac{1}{2} R_E = 5\sqrt{3} \cdot \frac{19}{48} - \frac{5\sqrt{3}}{8} = \frac{5\sqrt{3}}{48} \cdot 13 \approx 2{,}34 \text{ кГ},$$

из пятого уравнения:

$$30Z_B = 50 + 75 - \frac{15\sqrt{3}}{2} R_E = 125 - \frac{15}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} = \\ = 125 - \frac{225}{8},$$

$$Z_B = \frac{25}{6} - \frac{15}{16} = 3{,}2 \text{ кГ},$$

из третьего уравнения будем иметь:

$$Z_A = 5 - Z_B - \frac{\sqrt{3}}{2} R_B = 5 - 3{,}2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4} = -0{,}075 \text{ кГ}.$$

Так как для сил Y_B и Z_A мы получили отрицательные значения, то эти проекции имеют направления, противоположные изображенным на рисунке.

Шестая группа

Задачи о равновесии тела, закрепленного при помощи шести стержней, соединенных с данным телом и с опорами шарнирно

(задачи 268 и 269)

Пример 45

Однородная плита весом P, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, закреплена неподвижно при помощи шести стержней, шарнирно соединенных своими концами с плитой и неподвижными опорами, как показано на рис. 78.

В вершине D к плите приложена сила $\overline{Q}$, направленная по стороне DC плиты. Определить реакции шести опорных стержней при условии, что весами стержней пренебрегаем. Размеры указаны на рисунке. Угол α задан и $DE = EA$.

Решение

Реакции опорных стержней, соединенных своими концами шарнирно, направлены вдоль этих стержней, так как весами их пренебрегаем.

Направим реакцию каждого стержня вдоль этого стержня, как указано на рисунке.

Рассматриваемая плита находится в равновесии под действием сил $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$, $\bar{S}_4$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$, не лежащих в одной плоскости, причем шесть реакций $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2, \ldots$, $\bar{S}_6$ известны по направлению, но неизвестны по величине. Чтобы определить эти неизвестные реакции, выберем систему координатных осей, как указано на рисунке, и составим шесть уравнений равновесия, приравнивая нулю сумму проекций всех сил на координатные оси и сумму их моментов относительно тех же осей.

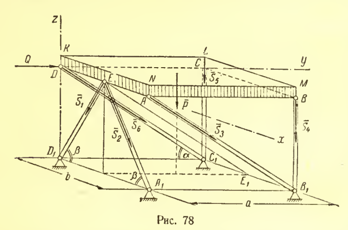


Рис. 78

Следовательно, при решении задачи о равновесии тела, закрепленного при помощи шести стержней, не лежащих в одной плоскости, получаем шесть неизвестных по величине, но известных по направлению реакций стержней, которые определяются из шести уравнений равновесия системы; поэтому задача является статически определимой.

Для того чтобы составить шесть уравнений равновесия, найдем проекции каждой силы на оси x, y и z и ее моменты относительно этих осей.

Силы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_6$ пересекают ось x, а потому их моменты относительно этой оси равны нулю. Силы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_6$ пересекают ось z, а силы $\bar{P}$, $\bar{S}_4$ и $\bar{S}_5$ параллельны этой оси. Следовательно, моменты этих пяти сил относительно оси z равны нулю. Силы $\bar{S}_5$ и $\bar{S}_6$ пересекают ось y, а потому

$$m_y(\bar{S}_5) = m_y(\bar{S}_6) = 0.$$

Так как сила $\bar{Q}$ приложена в начале координат, то

$$m_x(\bar{Q}) = m_y(\bar{Q}) = m_z(\bar{Q}) = 0.$$

Таким образом, уравнения равновесия запишутся так:

1) $S_3 \cdot \cos\alpha + S_6 \cdot \cos\alpha + Q = 0,$

2) $S_1 \cos\beta - S_2 \cos\beta = 0$,
3) $-P - S_4 - S_5 - S_2 \sin\alpha - S_6 \sin\alpha - S_1 \sin\beta - - S_2 \sin\beta = 0$,
4) $m_x(\bar{S}_4) + m_x(\bar{S}_5) + m_x(\bar{P}) = 0$,
5) $m_y(\bar{S}_1) + m_y(\bar{S}_2) + m_y(\bar{S}_3) + m_y(\bar{S}_4) + m_y(\bar{P}) = 0$.
6) $m_z(\bar{S}_3) = 0$.

Из шестого уравнения следует, что $S_3 = 0$, так как сила $\bar{S}_3$ не пересекает ось z и не параллельна ей, а момент ее относительно этой оси равен нулю. Кроме того, из второго уравнения находим, что $S_1 = S_2$.

Моменты сил $\bar{S}_4$ и $\bar{S}_5$ относительно оси x легко найти из рисунка, так как эти силы лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси x:

$$m_x(\bar{S}_4) = -S_4 \cdot a$$

и

$$m_x(\bar{S}_5) = -S_5 \cdot a.$$

Точно так же найдем, что

$$m_y(\bar{S}_4) = S_4 \cdot b,$$

$$m_y(\bar{P}) = P \cdot \frac{b}{2} \text{ и } m_x(\bar{P}) = -P \cdot \frac{a}{2}.$$

Моменты сил $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_6$ относительно оси y вычисляем по формулам (29). Так как $z_E = 0$, то

$$m_y(\bar{S}_1) = \frac{b}{2} S_1 \cdot \sin\beta$$

и

$$m_y(\bar{S}_2) = \frac{b}{2} S_2 \cdot \sin\beta.$$

Подставляя найденные значения моментов сил в уравнения равновесия и принимая во внимание, что $S_3 = 0$, получим следующую систему уравнений:

1) $S_6 + \frac{Q}{\cos a} = 0$,
2) $S_1 = S_2$,
3) $-P - S_4 - S_5 - S_6 \sin\alpha = 2S_1 \cdot \sin\beta$,
4) $S_1 \frac{b}{2} \sin\beta + S_2 \frac{b}{2} \sin\beta + S_4 b + P \cdot \frac{b}{2} = 0$,
5) $S_4 \cdot a + S_5 \cdot a + P \cdot \frac{a}{2} = 0$.

Или

1) $S_6 = -\frac{Q}{\cos a}$,

$$3)\ -S_4-S_5-S_6\sin\alpha=P+2S_1\sin\beta,$$

$$4)\ S_1\sin\beta+S_4=-\frac{P}{2},$$

$$5)\ S_4+S_5=-\frac{P}{2}.$$

Сложив третье уравнение с пятым, получим

$$-S_6\sin\alpha=\frac{P}{2}+2S_1\sin\beta,$$

или

$$Q\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{P}{2}+2S_1\sin\beta,$$

откуда

$$S_1=\frac{Q\operatorname{tg}\alpha-\frac{P}{2}}{2\sin\beta}=\frac{2Q\operatorname{tg}\alpha-P}{4\sin\beta}=S_2.$$

Из четвертого и пятого уравнений имеем:

$$S_4=-\frac{P}{2}-S_1\sin\beta=-\frac{P}{2}-\frac{2Q\operatorname{tg}\alpha-P}{4}=-\frac{2Q\operatorname{tg}\alpha+P}{4},$$

$$S_5=-\frac{P}{2}-S_4=-\frac{P}{2}+\frac{P}{2}+S_1\sin\beta=S_1\sin\beta=\frac{2Q\operatorname{tg}\alpha-P}{4}.$$

Знаки минусы, полученные для реакций S_6 и S_4, указывают на то, что эти силы имеют направления, противоположные принятым на рисунке, и следовательно, стержни *4* и *6* сжаты.

Если

$$Q>\frac{P}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

то стержни *1*, *2* и *5* растянуты; в противном случае эти стержни сжаты.

Уравнения равновесия в данной задаче можно составить и другим способом,— так, чтобы система этих шести уравнений распадалась на три системы, по два уравнения с двумя неизвестными в каждой. Для этого приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, приложенных к плите, и сумму их моментов относительно осей C_1B_1, DD_1, AA_1, AD и EE_1.

Действительно, силы $\overline{S}_4$ и $\overline{S}_5$ параллельны оси AA_1, а $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ пересекают эту ось, а потому момент каждой из этих пяти сил относительно оси AA_1 равен нулю. Точно так же силы $\overline{S}_3$, $\overline{S}_4$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_6$ пересекают ось B_1C_1, поэтому момент каждой из этих четырех сил относительно оси C_1B_1 равен нулю. Наконец, силы $\overline{S}_3$ и $\overline{S}_6$ параллельны оси EE_1, а силы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ пересекают эту ось; следовательно, момент каждой из сил относительно оси EE_1

равен нулю. Уравнения моментов относительно осей DD_1 и AD составлены выше.

Таким образом, из неизвестных реакций в первые два уравнения войдут только реакции S_1 и S_2, в третье уравнение — реакция S_3, в четвертое — реакция S_6, а в последние два уравнения — реакции S_4 и S_5. Следовательно, получим такие уравнения равновесия:

$$1)\ S_1 \cos\beta - S_2 \cos\beta = 0$$

— уравнение проекций на ось x;

$$2)\ -S_1 \cdot a \sin\beta - S_2 a \sin\beta + Q \cdot a \operatorname{tg}\alpha - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

— уравнение моментов относительно оси C_1B_1;

$$3)\ S_3 \cdot b \cos\alpha = 0$$

— уравнение моментов относительно оси DD_1;

$$4)\ -S_6 b \cos a - Q \cdot b = 0$$

— уравнение моментов относительно оси AA_1;

$$5)\ -S_5 \cdot a - S_4 \cdot a - P \cdot \frac{a}{2} = 0$$

— уравнение моментов относительно оси AD;

$$6)\ S_4 \frac{b}{2} \cos a - S_5 \frac{b}{2} \cos a + Q \frac{b}{2} \sin\alpha = 0$$

— уравнение моментов относительно оси EE_1.

Из первых двух уравнений находим:

$$S_1 = S_2 \text{ и } 2S_1 \sin\beta = \frac{2Q \operatorname{tg}\alpha - P}{2},$$

или

$$S_1 = \frac{2Q \operatorname{tg}\alpha - P}{4}.$$

Из третьего и четвертого уравнений имеем:

$$S_3 = 0,\ S_6 = -\frac{Q}{\cos\alpha}.$$

Переписав пятое и шестое уравнения в виде

$$S_5 + S_4 = -\frac{P}{2},$$
$$-S_5 + S_4 = -Q \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

находим:

$$S_4 = -\frac{P + 2Q \operatorname{tg}\alpha}{4},$$
$$S_5 = S_4 + Q \operatorname{tg}\alpha = -\frac{P + 2Q \operatorname{tg}\alpha}{4} + Q \operatorname{tg}\alpha = -\frac{P - 2Q \operatorname{tg}\alpha}{4}.$$

ГЛАВА V

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Задачи, рассматриваемые в этой главе, можно разделить на следующие четыре группы:

1) задачи на определение общего центра тяжести нескольких тел, веса и положение центров тяжести которых известны;

2) задачи на определение центра тяжести однородного контура;

3) задачи на определение центра тяжести площади плоской фигуры (однородной тонкой плоской пластинки);

4) задачи на определение центра тяжести объема (однородного тела).

При решении задач, относящихся ко второй, третьей и четвертой группам, рассмотрим только те случаи, когда применим метод разбиения данной линии, плоской фигуры или данного тела на конечное число простейших по форме частей, центры тяжести которых легко определяются.

Если данное тело имеет плоскость или ось, или центр симметрии, то центр тяжести такого тела лежит соответственно в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии. Поэтому для упрощения вычислений при решении задач плоскость симметрии всегда нужно выбирать за одну из координатных плоскостей, а ось симметрии — за одну из координатных осей.

Первая группа

задача № 298

Если веса данных тел обозначим P_i, а координаты их центров тяжести x_i, y_i, z_i, то координаты общего центра тяжести этих тел определятся по формулам:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}, \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}, \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n). \qquad (39)$$

Пример 46

Центры тяжести грузов A_1, A_2, A_3, A_4, веса которых соответственно равны $P_1 = P_3 = 10$, $P_2 = 5$, $P_4 = 15$ *кГ*, находятся в вершинах тетраэдра; высота этого тетраэдра A_4M проходит через точку M пересечения медиан основания $A_1A_2A_3$ тетраэдра. Дано: $A_1A_2 = 4$ *см*, $A_1A_3 = 8$ *см*, $A_4M = 40$ *см*. Угол $\alpha = 30°$. Найти положение центра тяжести этих грузов (рис. 79).

Решение

Координатные оси с началом в точке A_1 направим, как указано на рис. 79. Тогда координаты центров тяжести данных грузов A_1, A_2, A_3, A_4 будут соответственно равны:

$$x_1=0 \qquad x_2=2\ см \qquad x_3=0 \qquad x_4=x_M$$
$$y_1=0 \qquad y_2=2\sqrt{3}\ см \qquad y_3=8\ см \qquad y_4=y_M$$
$$z_1=0 \qquad z_2=0 \qquad z_3=0 \qquad z_4=40\ см$$

Так как точка M есть точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, то, как известно из аналитической геометрии,

$$x_M=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{2}{3}; \quad y_M=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{2\sqrt{3}+8}{3};$$

Теперь, применяя формулы (39), находим координаты искомого центра тяжести:

$$x_c=\frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+P_4x_4}{40}=\frac{5\cdot 2+15\cdot\frac{2}{3}}{40}=0{,}5;$$

$$y_c=\frac{P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+P_4y_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}=\frac{5\cdot 2\sqrt{3}+10\cdot 8+15\cdot\frac{2\sqrt{3}+8}{3}}{40}=$$
$$=3+\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_c=\frac{P_1z_1+P_2z_2+P_3z_3+P_4z_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}=\frac{15\cdot 40}{40}=15; \text{ или}$$
$$x_c=0{,}5\ см; \quad y_c=3{,}86\ см; \quad z_c=15\ см.$$

Вторая группа

задачи № 286, 299—301

Разбив данный однородный контур на n простейших по форме линий, обозначим длины этих линий l_i, а координаты их центров

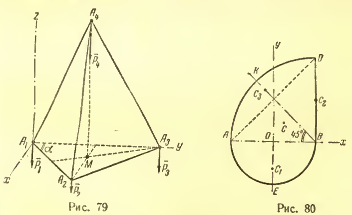


Рис. 79

Рис. 80

тяжести x_i, y_i, z_i. Тогда координаты центра тяжести данного контура определяются по формулам:

$$x_c=\frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i};\quad y_c=\frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i};\quad z_c=\frac{\sum l_i z_i}{\sum l_i}\ldots\qquad(40)$$

В случае плоского контура, плоскость которого принимаем за координатную плоскость xOy, будем иметь: $z_i=0$ ($i=1, 2, 3, 4, \ldots n$) и, следовательно, $z_c=0$.

Пример 47

Определить координаты центра тяжести C однородного контура $AEBDKA$, состоящего из дуги полуокружности AEB, прямолинейного отрезка BD и дуги окружности DKA с центром в точке B, если $AO=OB=r$; $BD=2r$; $\angle ABD=90°$. Оси координат указаны на рис. 80.

Решение

Заданный контур разобьем на три части: полуокружность AEB, отрезок BD и четверть окружности DKA. Обозначим центры тяжести этих частей соответственно C_1, C_2, C_3, а их длины l_1, l_2, l_3. Тогда $l_1=\pi r$; $l_2=2r$, $l_3=\pi r$.

Центр тяжести C_1 дуги AEB лежит на оси y, причем

$$OC_1=\frac{r\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2r}{\pi}^{*};\quad \text{поэтому}\quad x_1=0;\ y_1=-\frac{2r}{\pi};$$

Центр тяжести отрезка BD лежит в середине этого отрезка, а потому

$$x_2=r;\ y_2=\frac{BD}{2}=r;$$

Центр тяжести дуги AKD лежит на отрезке KB, причем

$$BC_3=\frac{2r\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4r\sqrt{2}}{\pi}^{*}.$$

Следовательно,

$$x_{c3}=-(BC_3\cdot\cos 45°-r)=-\left(\frac{4r}{\pi}-r\right);$$

$$y_{c3}=BC_3\cdot\cos 45°=\frac{4r}{\pi}.$$

Полученные расчетные данные расположим в табл. 8.

---

* Расстояние от центра тяжести C дуги окружности радиусом R до центра O этой окружности определяется по формуле $OC=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$, где α — половина центрального угла этой дуги.

Таблица 8

N частей	l_i	x_i	y_i	$l_i x_i$	$l_i y_i$
1	πr	0	$-\frac{2r}{\pi}$	0	$-2r^2$
2	$2r$	r	r	$2r^2$	$2r^2$
3	πr	$r-\frac{4r}{\pi}$	$\frac{4r}{\pi}$	$\pi r\left(r-\frac{4r}{\pi}\right)$	$4r^2$

Теперь координаты искомого центра тяжести находим по формулам (40):

$$x_c=\frac{l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3}{l_1+l_2+l_3}=\frac{r(\pi-2)}{2(\pi+1)};\qquad y_c=\frac{l_1y_1+l_2y_2+l_3y_3}{l_1+l_2+l_3}=\frac{2r}{\pi+1};$$

Третья группа

задачи № 287—296

Разбив данную плоскую фигуру на n простейших по форме частей, обозначим площади этих частей S_i, а координаты их центров тяжести x_i, y_i. Тогда координаты центра тяжести данной фигуры определяются по формулам:

$$x_c=\frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i};\quad y_c=\frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}. \qquad (41)$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n.)$$

Пример 48

В примере № 47 определить координаты центра тяжести площади, ограниченной контуром $AEBDKA$ (рис. 81).

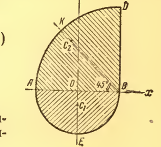


Рис. 81

Решение

Разобьем данную плоскую фигуру на две части: полукруг AEB и четверть круга $BAKD$. Обозначим центры тяжести этих частей и их площади соответственно C_1, C_2, и S_1, S_2. Тогда $S_1=\frac{\pi r^2}{2}$, $S_2=\pi r^2$. Центр тяжести полукруга AEB лежит на оси Oy, причем

$$OC_1=\frac{2}{3}\,\frac{r\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4r}{3\pi}*,$$

* Расстояние от центра тяжести C кругового сектора радиусом R до центра круга O определяется по формуле $OC=\frac{2}{3}\,\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$, где α — половина центрального угла этого сектора.

$$\text{поэтому } x_1 = 0, \ y_1 = -\frac{4r}{3\pi}.$$

Центр тяжести C_2 кругового сектора $ABDKA$ лежит на прямой BK, причем

$$BC_2 = \frac{2}{3} \frac{2r\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8r\sqrt{2}}{3\pi}^{*}.$$

$$x_2 = -(BC_2 \sin 45^\circ - r) = -\frac{8r}{3\pi} + r; \quad y_2 = BC_2 \cdot \sin 45^\circ = \frac{8r}{3\pi}.$$

Координаты искомого центра тяжести данной плоской фигуры $AEBDKA$ находим по формулам (41):

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = \frac{-\pi r^2 \cdot \left(\frac{8r}{3\pi} - r\right)}{\frac{3}{2}\pi r^2} = \frac{2}{3} r \frac{(-8 + 3\pi)}{3\pi} = \frac{2r}{9\pi}(-8 + 3\pi);$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2}{S_1 + S_2} = \frac{-\frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi} + \pi r^2 \cdot \frac{8r}{3\pi}}{\frac{3}{2}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}, \ x_c = \frac{2r}{9\pi}(3\pi - 8); \ y_c = \frac{4r}{3\pi}.$$

Пример 49

Определить положение центра тяжести профиля, состоящего из прямоугольника и двух уголков, размеры которых в миллиметрах указаны на рис. 82.

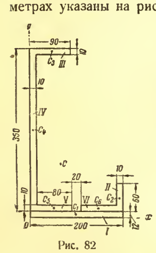


Рис. 82

Решение

Выберем систему координатных осей, как указано на рис. 82, и заданный профиль разобьем на шесть прямоугольников I, II, ... VI. Обозначим центры тяжести этих прямоугольников соответственно C_1, C_2, ... C_6, а их площади — S_1, S_2, S_3 ... S_6.

Тогда $S_1 = 200 \cdot 12 = 2400$ $мм^2 = 24$ $см^2$;
$S_2 = 60 \cdot 10 = 600$ $мм^2 = 6$ $см^2$;
$S_2 = S_5 = S_6 = 80 \cdot 10 = 800$ $мм^2 = 8$ $см^2$;
$S_4 = 350 \cdot 10 = 3500$ $мм^2 = 35$ $см^2$.

При вычислении координат x_1, y_1, x_2, y_2, ... x_6, y_6 точек C_1, C_2, ... C_6 следует учесть, что центр тяжести прямоуголь-

* Расстояние от центра тяжести C кругового сектора радиусом R до центра круга O определяется по формуле $OC = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$, где α — половина центрального угла дуги окружности сектора.

ника находится в точке пересечения его диагоналей, а поэтому $x_1 = 100$ *мм* $= 10$ *см*; $x_2 = 200 - 5 = 195$ *мм* $= 19{,}5$ *см*;

$x_3 = x_5 = 10 + 40 = 50$ *мм* $= 5$ *см*; $x_4 = 5$ *мм* $= 0{,}5$ *см*;
$x_6 = 200 - 10 - 40 = 150$ *мм* $= 15$ *см*;
$y_1 = 6$ *мм* $= 0{,}6$ *см*; $y_2 = 12 + 30 = 42$ *мм* $= 4{,}2$ *см*;
$y_3 = 12 + 350 - 5 = 357$ *мм* $= 35{,}7$ *см*; $y_4 = 12 + \frac{350}{2} =$
$= 187$ *мм* $= 18{,}7$ *см*; $y_5 = y_6 = 12 + 5 = 17$ *мм* $= 1{,}7$ *см*.

Полученные данные расположим в виде табл. 9.

Таблица 9

№ частей	S_i	x_i	y_i	$S_i x_i$	$S_i y_i$
1	24	10	0,6	240	14,4
2	6	19,5	4,2	117	25,2
3	8	5	35,7	40	285,6
4	35	0,5	18,7	17,5	654,5
5	8	5	1,7	40	13,6
6	8	15	1,7	120	13,6

Искомые координаты центра тяжести данного профиля находим по формулам (41):

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{240 + 117 + 40 + 17{,}5 + 40 + 120}{24 + 6 + 8 + 35 + 8 + 8} = \frac{574{,}5}{89} = 6{,}45 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{14{,}4 + 25{,}2 + 285{,}6 + 654{,}5 + 13{,}6 + 13{,}6}{89} = \frac{1006{,}9}{89} = 11{,}31 \text{ см}.$$

Если в данной фигуре имеются вырезы (отверстия), то координаты центра тяжести такой фигуры определяются тем же способом, как и в примерах № 48 и 49, по тем же формулам (41), но только площади вырезанных частей (поскольку они отнимаются) нужно считать отрицательными, т. е. брать со знаком минус.

Пример 50

Определить положение центра тяжести фигуры, представляющей собой круг радиусом R с центром в точке O, из которого вырезаны три круга с центрами в точках O_1, O_2, O_3, если рас-

стояния между центрами этих кругов и их радиусы соответственно равны:

$$OO_1 = l_1 \qquad l_1 = \frac{2}{3}R \qquad l_2 = \frac{R}{2} \qquad l_3 = \frac{3}{4}R$$

$$OO_2 = l_2 \qquad r_1 = \frac{R}{8} \qquad r_2 = \frac{R}{4} \qquad r_3 = \frac{R}{6}.$$

$$OO_3 = l_3$$

Угол α равен 120° (рис. 83).

Решение

Начало координат выберем в центре O большого круга, а ось x направим по прямой, соединяющей точки O и O_3. Будем рассматривать данную фигуру, как состоящую из кругов радиусов r_1, r_2, r_3 и полного круга радиусом R (без вырезов). Обозначим площади этих кругов S_1, S_2, S_3, S_4, а координаты их центров тяжести x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4.

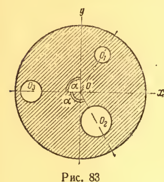


Рис. 83

Так как центр тяжести каждого круга совпадает с центром этого круга, то

$$x_1 = l_1 \cos 60° = \frac{R}{3};$$

$$x_2 = l_2 \cos 60° = \frac{R}{4};$$

$$x_3 = -l_3 = -\frac{3R}{4};$$

$$x_4 = 0;$$

$$y_1 = l_1 \cos 30° = \frac{R\sqrt{3}}{3}; \quad y_2 = -l_2 \cos 30° = -\frac{R\sqrt{3}}{4}; \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Кроме того, $S_4 = \pi R^2$. Так как площади вырезанных кругов отнимаются, то как было указано выше, их надо брать со знаком минус, т. е. $S_1 = -\pi r_1^2 = -\frac{\pi R^2}{64}$; $S_2 = -\pi r_2^2 = -\frac{\pi R^2}{16}$;

$$S_3 = -\pi r_3^2 = -\frac{\pi R^2}{36}.$$

Таким образом, получим табл. 10.

Таблица 10

№ частей	S_i	x_i	y_i	$S_i x_i$	$S_i y_i$
1	$\frac{-\pi R^2}{64}$	$\frac{R}{3}$	$\frac{R\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-\pi R^3}{192}$	$\frac{-\pi R^3\sqrt{3}}{192}$
2	$\frac{-\pi R^2}{16}$	$\frac{R}{4}$	$\frac{-R\sqrt{3}}{4}$	$\frac{-\pi R^3}{64}$	$\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{64}$
3	$\frac{-\pi R^2}{36}$	$\frac{-3R}{4}$	0	$\frac{\pi R^3}{48}$	0
4	πR^2	0	0	0	0

Координаты искомого центра тяжести будут:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum S_i} = \frac{\pi R^3\left(-\frac{1}{192} - \frac{1}{64} + \frac{1}{48}\right)}{\pi R^2\left(-\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + 1\right)} = 0;$$

$$y_c = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i} = \frac{\pi R^3\cdot\sqrt{3}\left(-\frac{1}{192} + \frac{1}{64}\right)}{\pi R^2\left(-\frac{1}{64} - \frac{1}{16} - \frac{1}{36} + 1\right)} = \frac{6\sqrt{3}}{515}R.$$

Итак, $x_c = 0$, $y_c \approx 0{,}02R$.

Четвертая группа

Разбив данное тело на n простейших по форме частей, обозначим объемы этих частей V_i, а координаты их центров тяжести x_i, y_i, z_i. Тогда координаты центра тяжести данного тела определяют по формулам:

$$x_c = \frac{\Sigma V_i x_i}{\Sigma V_i}, \quad y_c = \frac{\Sigma V_i y_i}{\Sigma V_i}, \quad z_c = \frac{\Sigma V_i z_i}{\Sigma V_i}. \qquad (42)$$
$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Пример 51

На рис. 84 показан разрез тела, состоящего из цилиндра радиусом r и высоты h и двух полушаров радиусами R_1, R_2, центры которых совпадают с центрами нижнего и верхнего оснований цилиндра. Определить центр тяжести этого тела, если $R_1 = 2R_2$, $h = 4R_2$, $r = \frac{R_2}{3}$.

Решение

Так как ось z является для данного тела осью симметрии, то искомый центр тяжести C этого тела лежит на оси z: поэтому достаточно вычислить только одну координату z_c.

Рис. 84

Обозначим объемы полушаров и цилиндра соответственно V_1, V_2, V_3, а их центры тяжести C_1, C_2, C_3. За начало координат выберем точку C_3. Тогда эти объемы и координаты центров тяжести C_1, C_2, C_3 будут соответственно равны:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R_1^3 = 144\pi r^3,$$

$$z_1 = -\left(\frac{h}{2} + \frac{3}{8}R_1\right)^* = -\frac{33}{4}r,$$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R_2^3 = 18\pi r^3, \qquad z_2 = \frac{h}{2} + \frac{3}{8}R_2{}^* = \frac{57}{8}r,$$

$$V_3 = \pi r^2 h = 12\pi r^3, \qquad z_3 = 0.$$

Искомую координату z_c центра тяжести данного тела находим по третьей формуле из (42):

$$z_c = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + V_3 z_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{-\frac{33}{4}\cdot 144 + \frac{57}{8}\cdot 18}{174} r = -\frac{1413}{232} r$$

или

$$z_c = -6{,}09r.$$

Итак,

$$z_c \approx -6r.$$

В некоторых случаях применение метода разбиения тела (или данной плоской фигуры) на простейшие части связано с особым приемом, который можно назвать методом дополнения.

Сущность этого метода состоит в следующем: к данному телу *I* присоединяют второе тело *II* так, чтобы получилось новое тело *III* простой геометрической формы, центр тяжести которого легко можно определить. Например, продолжив две противоположные стороны данного четырехугольника до их пересечения, можно дополнить его до треугольника; усеченный тетраэдр можно дополнить до четырехгранной пирамиды. Если при этом

---

* Расстояние от центра тяжести полушара радиусом R до его основания равно $\frac{3}{8}R$ (см. учебник проф. И. М. Воронкова, § 56).

положение центра тяжести присоединенного тела *II* также легко можно определить, то к телу *III* применяем метод разбиения на простейшие части: это тело можно рассматривать состоящим из двух частей: данного тела *I* и добавленного тела *II*, и, следовательно, можно воспользоваться формулами (42).

Пример 52

Определить расстояние центра тяжести усеченного круглого конуса $ADEB$ от его нижнего основания, если известны радиусы R и r верхнего и нижнего оснований конуса и его высота h (рис. 85).

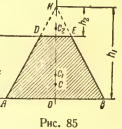


Рис. 85

Решение

Начало координат выберем в центре O нижнего основания усеченного конуса, а ось z направим по его высоте. Так как ось z является осью симметрии усеченного конуса, то искомый центр тяжести лежит на этой оси в некоторой точке C с координатой z_c, которую и требуется определить. Применяя метод дополнения, дополним данный усеченный конус до конуса ABK.

Пусть C_1 и C_2 — центры тяжести конусов AKB и DKE, V_1 и V_2 — их объемы. Тогда $OC_1 = z_1$, $OC_2 = z_2$ и $V_1 = V_2 + V$, где V — объем данного усеченного конуса. Рассматривая конус AKB, как состоящий из двух частей $ADEB$ и DKB, и применяя формулу (42), будем иметь:

$$z_1 = \frac{z_2 V_2 + z_C V}{V_1},$$

откуда

$$z_C = \frac{z_1 V_1 - z_1 V_2}{V}$$

или

$$z_C = \frac{z_1 V_1 - z_2 V_2}{V_1 - V_2}. \qquad (43)$$

Так как объемы двух подобных конусов AKB и DKE пропорциональны кубам радиусов их оснований, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^3}{r^3}$ и, следовательно,

$$z_c = \frac{z_1 R^3 - z_2 r^3}{R^3 - r^3}.$$

Кроме того, расстояние от центра тяжести конуса до его основания равно $\frac{1}{4}$ высоты этого конуса, а потому

$$z_1=\frac{h_1}{4},\quad z_2=h+\frac{h_2}{4}=h+\frac{h_1-h}{4}=\frac{h_1+3h}{4},$$

и

$$z_1R^2-z_2r^2=\frac{h_1R^2-(h_1+3h)r^2}{4}=\frac{h_1(R^2-r^2)-3hr^2}{4}.$$

Учитывая, что $\frac{h_1}{h}=\frac{R}{R-r}$, т. е. $h_1=\frac{R\cdot h}{R-r}$, получим

$$z_1R^2-z_2r^2=\frac{h}{4}[R(R^2+Rr+r^2)-3r^2]=\frac{h}{4}[R^2-r^2+r(R^2-r^2)+$$
$$+r^2(R-r)]=\frac{h(R-r)}{4}[R^2+rR+r^2+r(R+r)+r^2]=$$
$$=\frac{h(R-r)}{4}\cdot(R^2+2rR+3r^2).$$

Следовательно,

$$z_c=\frac{h(R-r)(R^2+2rR+3r^2)}{4(R^3-r^3)}=\frac{h(R^2+2Rr+3r^2)}{4(R^2+Rr+r^2)},$$
$$z_c=\frac{h(R^2+2Rr+3r^2)}{4(R^2+Rr+r^2)}.$$

Если данное тело имеет полости (вырезанные части), то координаты центра тяжести такого тела определяются по тем же формулам (42), но только в этих формулах объемы вырезанных частей нужно брать со знаком минус.

Пример 53

Из усеченного конуса, радиусы нижнего и верхнего оснований которого R и r, а высота h, вырезáн круглый цилиндр радиусом r_1, имеющий с конусом общую ось и высоту, равную $h_1=\frac{h}{2}$. Найти расстояние центра тяжести оставшейся части от нижнего основания конуса (рис. 86).

Рис. 86

Решение

Возьмем начало координат в центре нижнего основания конуса, а ось z направим по его оси симметрии. Искомый центр тяжести C лежит на оси z. На этой же оси лежат центр тяжести C_1 сплошного усеченного конуса (без выреза) и центр тяжести C_2 вырезанного цилиндра, причем

$$OC_1=z_1=\frac{h}{4}\cdot\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+rR+r^2},\ ^*$$

* См. предыдущий пример.

$$OC_2 = z_2 = h - \frac{h_1}{2} = \frac{3}{4} h.$$

Объемы сплошного усеченного конуса и вырезанного цилиндра будут соответственно равны:

$$V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2), \quad V_2 = -\pi r_1^2 h_1 = -\frac{\pi r_1^2 h}{2}$$

(объем V_2 вырезанного цилиндра берем со знаком минус).

Применяя теперь третью формулу из (42), получим:

$$z_c = \frac{\frac{\pi h^2}{12}(R^2 + 2Rr + 3r^2) - \frac{3}{8}\pi r_1^2 h^2}{\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi r_1^2 h}{2}} = \frac{h}{4} \cdot \frac{2(R^2 + 2Rr + 3r^2) - 9r_1^2}{2(R^2 + Rr + r_1^2) - 3r_1^2}.$$

РАЗДЕЛ II
КИНЕМАТИКА

ГЛАВА I
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика изучает движение механической системы, в частности, абсолютно твердого тела, независимо от сил, действующих на эту систему. Так как при движении твердого тела различные его точки могут двигаться различно, то в кинематике сначала изучается движение более простого объекта, а именно, движение точки, а затем — движение твердого тела.

Определить движение точки — это значит уметь определить положение этой точки по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени t.

В кинематике применяются три способа, описывающих движение точки: векторный, координатный и естественный.

При векторном способе определения движения радиус-вектор $\bar{r}$ движущейся точки M, проведенный из выбранного неподвижного центра (начала системы отсчета), выражается как векторная функция от времени, т. е.

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \tag{44}$$

Координатный способ определения движения точки состоит в том, что декартовы координаты движущейся точки в выбранной системе координат выражаются как функции времени t.

Уравнения движения точки в декартовых координатах имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t),\\ y&=f_2(t),\\ z&=f_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Если точка движется в плоскости xOy, то будем иметь только два уравнения движения:

$$x = f_1(t),$$
$$y = f_2(t).$$

В этом случае можно определить движение точки, применяя и полярную систему координат; уравнения движения точки в полярных координатах запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} r &= F_1(t), \\ \varphi &= F_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

где r и φ — полярные координаты движущейся точки.

При естественном, или натуральном, способе движение точки определяется ее траекторией и уравнением движения по этой траектории

$$s = \smile OM = f(t), \qquad (47)$$

где O — начало отсчета дуг на траектории, а s — дуговая координата точки M, или взятая с соответствующим знаком длина дуги, отсчитываемой вдоль траектории от начала отсчета до точки M (рис. 87).

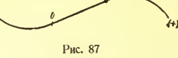


Рис. 87

Уравнение (47) называется законом, или уравнением движения точки M по ее траектории.

Задачи, относящиеся к «Кинематике точки», можно разделить на следующие основные типы:

1. Составление уравнений движения точки, исходя из условий данной задачи.

2. Определение траектории, скорости и ускорения точки из данных уравнений движения в декартовых координатах.

3. Определение скорости и ускорения точки, когда ее движение определяется естественным способом.

4. Комбинированные задачи.

Кроме того, задачи, относящиеся к каждому из этих типов, можно разделить на две группы, в зависимости от траектории движения:

а) задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки;
б) задачи, относящиеся к криволинейному движению точки.

§ 1. Составление уравнений движения точки

(задачи 317, 319, 409—411, 327, 334 *)

При решении задач на составление уравнений движения точки необходимо рассматривать положение движущейся точки в произвольный момент времени t, а не ее начальное или конечное положение, и выразить ее текущие координаты как функции времени t.

---

* Здесь и дальше номера задач указаны по «Сборнику задач по теоретической механике» проф. И. В. Мещерского, изд. 1950 г. и последующих изданий.

Пример 54

Линейка эллипсографа длиной $AB = l = 1$ *м* скользит своими концами по осям Ox и Oy. Конец A линейки движется вправо по оси x, причем закон этого движения выражается так: $OA = 0{,}1t$ *м*. Составить уравнения движения точек B и M, если $AM = 0{,}5\ MB$ (рис. 88).

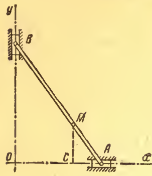


Рис. 88

Решение

Точка B движется по оси Oy, а потому $x_B = 0$; координату $y_B = OB$ точки B найдем из прямоугольного треугольника OAB:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{1 - 0{,}01\,t^2}.$$

Таким образом, уравнения движения точки B будут:

$$x_B = 0,$$

$$y_B = \sqrt{1 - 0{,}01\,t^2}.$$

Чтобы найти уравнения движения точки M, построим координаты этой точки (см. рис. 88)

$$x_M = OC,$$
$$y_M = MC.$$

Из подобия треугольников OAB и CAM получим:

$$\frac{MC}{OB} = \frac{AC}{OA} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$MC = \frac{1}{3}\,OB,$$

$$AC = \frac{1}{3}\,OA,$$

или

$$y_M = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 0{,}01\,t^2},$$

$$x_M = OC = \frac{2}{3}\,OA = \frac{1}{15}\,t.$$

Это и есть уравнения движения точки M.

Пример 55

Круглый эксцентрик диаметром $2r$ вращается вокруг оси O, отстоящей от геометрической оси C эксцентрика на расстоянии, равном $OC = a$; угол φ изменяется по закону $\varphi = \frac{\pi t^2}{4}$ (угол φ вы-

ражен в радианах, а t — в *сек*). Найти уравнения движения точки M стержня MN, движущегося в вертикальных направляющих, как указано на рис. 89.

Решение

Начало координат выберем в точке O, ось Oy направим вдоль стержня MN, а ось Ox — перпендикулярно к ней. Так как стержень MN движется в вертикальных направляющих, то точка M стержня движется прямолинейно по оси y и, следовательно, $x_M = 0$. Остается найти ординату $y_M = OM$ точки M как функцию времени t; для этого выразим отрезок OM через угол φ.

Проведя из точки C высоту CE в треугольнике MOC, будем иметь:

$$OM = OE + EM.$$

Но

$$OE = a\cos\varphi, \quad EC = a\sin\varphi$$

и

$$EM = \sqrt{\overline{MC}^2 - \overline{EC}^2} = \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\varphi},$$

а потому

$$y_M = OM = a\cos\varphi + \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\varphi}.$$

Рис. 89

Поставив значение угла φ в последнее равенство, получим закон движения точки M:

$$y_M = a\cos\frac{\pi t^2}{4} + \sqrt{r^2 - a^2\sin^2\frac{\pi t^2}{4}}.$$

Пример 56

Составить уравнения движения точки M обода колеса радиусом $R = 1$ *м* паровоза, если паровоз движется по прямолинейному участку пути с постоянной скоростью

$$v = 20\,\frac{м}{сек} = \text{const}$$

и колесо катится без скольжения; за начало координат принять начальное положение M_0 точки M (рис. 90).

Решение

Рассмотрим два положения колеса: в начальный момент $t=0$ и в текущий момент времени t.

Отметим положение точки M на ободе колеса и положение центра C колеса в момент t.

Так как расстояние от центра колеса до рельса все время равно радиусу R, то точка C движется по прямой, параллельной оси x и притом, по условию задачи, равномерно, а потому расстояние от этой точки до ее начального положения равно $C_0C=vt$. Так как $CA \parallel C_0M_0$, то $\angle MCA$ есть угол поворота колеса вокруг своей оси за t *сек*, который обозначим φ.

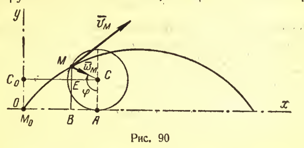


Рис. 90

Для того чтобы найти уравнения движения точки M, построим координаты этой точки:

$$x_M=M_0B,$$
$$y_M=MB.$$

Но

$$M_0B=M_0A-CE=C_0C-CE$$

и

$$MB=ME+EB,$$

или

$$x_M=vt-CE,\quad y_M=R+ME.$$

Из треугольника MEC будем иметь:

$$ME=R\cdot\sin(\varphi-90^\circ)=-R\cos\varphi,$$
$$EC=R\cos(\varphi-90^\circ)=R\sin\varphi,$$

а потому

$$x_M=vt-R\cdot\sin\varphi,$$
$$y_M=R-R\cos\varphi.$$

Найдем зависимость угла φ от времени t.

Так как качение колеса по рельсу происходит без скольжения, то

$$\smile MA=M_0A.$$

Но $M_0A=C_0C=vt$,

$$\smile MA = R\varphi,$$

а поэтому

$$vt = R \cdot \varphi$$

и

$$\varphi = \frac{v \cdot t}{R} = 20t.$$

Таким образом:

$$x_M = 20t - \sin 20t,$$
$$y_M = 1 - \cos 20t.$$

Пример 57

Кривошип $OO_1 = 2a$ вращается вокруг неподвижной оси O по закону $\varphi = \omega t$ (угол φ выражен в радианах, t — в *сек* и $\omega = \text{const}$). Вокруг пальца кривошипа O_1 вращается диск радиусом a так, что $\angle OO_1M = \varphi_1$ изменяется по тому же закону, что и угол φ, т. е. $\varphi_1 = \varphi = \omega t$.

Составить уравнения движения точки M диска (рис. 91)

Рис. 91

Решение

Выбрав оси координат, как указано на рис. 91, построим координаты точки M:

$$x_M = OA = MC,$$
$$y_M = MA = OC.$$

Выразим далее длины отрезков OA и MA через угол φ; для этого построим координаты точки O_1 и продолжим прямую MC до пересечения с O_1B в точке E.

Тогда

$$x_M = OB - AB,$$
$$y_M = O_1B - O_1E.$$

Из треугольника OO_1B находим:

$$OB = OO_1 \cdot \cos\varphi = 2a\cos\varphi,$$
$$O_1B = OO_1 \cdot \sin\varphi = 2a\sin\varphi.$$

Далее,

$$\angle O_1ME = \angle MO_1D = \angle MO_1O + \angle OO_1D = \varphi_1 + \varphi = 2\varphi.$$

Теперь из треугольника O_1ME находим:

$$O_1E = O_1M \cdot \sin 2\varphi = a \cdot \sin 2\varphi,$$
$$ME = O_1M \cdot \cos 2\varphi = a \cdot \cos 2\varphi.$$

Таким образом:

$$x_M = 2a\cos\varphi - a\cos 2\varphi,$$
$$y_M = 2a\sin\varphi - a\sin 2\varphi.$$

Так как по условию $\varphi = \omega t$, то уравнения движения точки M будут иметь вид

$$x_M = 2a\cos\omega t - a\cos 2\omega t = a(2\cos\omega t - \cos 2\omega t),$$
$$y_M = 2a\sin\omega t - a\sin 2\omega t = a(2\sin\omega t - \sin 2\omega t).$$

§ 2. Определение траектории, скорости и ускорения точки из уравнения движения в декартовых координатах

(задачи 311, 313—316, 320, 322, 326, 328, 349, 352, 354)

Если движение точки определено уравнениями в декартовых координатах, то, для того чтобы найти траекторию точки, достаточно из уравнений движения исключить время t.

Вектор скорости и вектор ускорения определяются по их проекциям на оси декартовых координат, причем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= \dot{z} = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (48) \qquad \left.\begin{aligned} w_x &= \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ w_y &= \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ w_z &= \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Модули и направляющие косинусы векторов скорости и ускорения определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} |\bar{v}| &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}) &= \frac{v_x}{|\bar{v}|} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}) &= \frac{v_y}{|\bar{v}|} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}) &= \frac{v_z}{|\bar{v}|} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

$$\left.\begin{aligned} |\bar{w}| &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \\ \cos(\widehat{\bar{w}, \bar{i}}) &= \frac{w_x}{|\bar{w}|} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{w}, \bar{j}}) &= \frac{w_y}{|\bar{w}|} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{w}, \bar{k}}) &= \frac{w_z}{|\bar{w}|} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Если точка движется по прямой, то, выбрав эту прямую за ось Ox, во все время движения будем, очевидно, иметь: $y = z = 0$.

Тогда на основании формул (48—51) найдем, что векторы скорости и ускорения направлены по оси Ox, а их проекции на эту ось равны:

$$v_x = v = \frac{dx}{dt}, \qquad (50')$$

$$w_x = w = \frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (51')$$

Здесь v и w — алгебраические значения скорости и ускорения, причем знак v или w указывает на то, в какую сторону по оси x направлен вектор скорости, или вектор ускорения.

Пример 58

Найти в момент $t = 1$ *сек* скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по оси y по закону:

$$y = \sqrt{1 - 0{,}01t^2} \text{ (см. пример 54).}$$

Решение

Так как точка движется прямолинейно, то ее скорость и ускорение найдем по формулам (50') и (51')

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d\sqrt{1 - 0{,}01t^2}}{dt} = -\frac{0{,}01t}{\sqrt{1 - 0{,}01t^2}};$$

так как $\frac{dy}{dt} < 0$, то скорость ползуна B направлена к точке O;

$$w = \frac{d^2y}{dt^2} = -0{,}01 \left\{ \frac{\sqrt{1 - 0{,}01t^2} - t \cdot \frac{-0{,}01t}{\sqrt{1 - 0{,}01t^2}}}{1 - 0{,}01t^2} \right\} =$$

$$= -\frac{0{,}01}{(1 - 0{,}01t^2)^{\frac{3}{2}}};$$

так как $\frac{d^2y}{dt^2} < 0$, то ускорение ползуна B также направлено к точке O, а потому ползун B движется ускоренно.

В момент $t = 1$ *сек*, $v_1 = -0{,}3 \frac{м}{сек}$ и $w_1 = -0{,}37 \frac{м}{сек^2}$.

Пример 59

По заданным уравнениям движения точки в декартовых координатах найти траекторию, скорость и ускорение этой точки:

1) $x = r\cos\omega t$,
$y = h + r\sin\omega t$.

2) $x = \frac{1}{15}t$,
$y = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 0{,}01t^2}$
(см. пример 54).

Решение

1) Чтобы найти траекторию точки, исключим время t из уравнений движения; для этого из первого уравнения найдем $\cos\omega t$, а из второго уравнения $\sin\omega t$.

Возведя обе части каждого из этих равенств в квадрат и сложив их, получим:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{(y-h)^2}{r^2}=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1,$$

или

$$x^2+(y-h)^2=r^2.$$

Следовательно, искомая траектория есть окружность радиуса r с центром в точке $(0,\ h)$ (рис. 92).

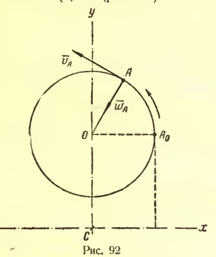


Рис. 92

Чтобы найти начальное положение движущейся точки, достаточно в уравнениях движения принять время t равным нулю. Тогда:

$$x_0=r\cos 0=r,$$
$$y_0=r\sin 0+h=h,$$

т. е. в начальный момент движущаяся точка занимает положение $A_0(r,\ h)$ (см. рис. 92).

При дальнейшем возрастании t координата x точки убывает, а координата y — возрастает. Следовательно, точка A движется по окружности в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

Воспользовавшись формулами (48) и (49), найдем далее проекции скорости и ускорения точки A на координатные оси:

$$v_x=\dot{x}=-\omega r\sin\omega t,\quad w_x=\ddot{x}=-r\omega^2\cos\omega t,$$

$$v_y = \dot{y} = r\omega \cos \omega t, \qquad w_y = \ddot{y} = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

Модули и направляющие косинусы векторов $\bar{v}$ и $\bar{w}$ находим по формулам (50) и (51):

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega,$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{|\bar{v}|} = -\sin \omega t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{\dot{y}}{|\bar{v}|} = \cos \omega t = \cos \varphi,$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = r\omega^2,$$

$$\cos(\bar{w}, \bar{i}) = -\cos \omega t = \cos(\pi + \omega t) = \cos(\pi + \varphi),$$

$$\cos(\bar{w}, \bar{j}) = -\sin \omega t = \sin(\pi + \omega t) = \sin(\pi + \varphi).$$

Следовательно, вектор скорости перпендикулярен радиусу-

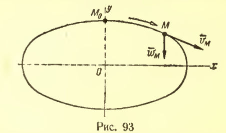


Рис. 93

вектору $\overline{OA}$ движущейся точки, а вектор ускорения направлен противоположно этому радиусу-вектору.

2) $x = \frac{t}{15}$,

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 0{,}01t^2}.$$

Чтобы исключить время из этих уравнений, выразим из первого уравнения t через x и подставим это значение во второе уравнение. Тогда будем иметь:

$$t = 15x, \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 2{,}25x^2}.$$

Отсюда

$$9y^2 + 2{,}25x^2 = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1.$$

Искомая траектория есть эллипс с центром в начале координат и полуосями $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ (рис. 93).

Полагая в уравнениях движения $t=0$, найдем координаты x_0, y_0 начального положения точки M_0:

$$x_0=0, \quad y_0=\frac{1}{3}.$$

Так как при дальнейшем возрастании t, x возрастает, а y убывает, то точка M движется по эллипсу в направлении движения часовой стрелки, выходя из точки M_0. Проекции скорости и ускорения точки M на координатные оси находим по формулам (48) и (49).

$$v_x=\dot{x}=\frac{1}{15}.$$

$$v_y=\dot{y}=-\frac{0{,}01t}{3\sqrt{1-0{,}01t^2}}=-\frac{0{,}15x}{9y}=-\frac{0{,}05x}{3y},$$

$$w_x=\ddot{x}=0,$$

$$w_y=\ddot{y}=-\frac{0{,}01}{3}\left[\sqrt{1-0{,}01t^2}+\frac{t\cdot 0{,}01t}{\sqrt{1-0{,}01t^2}}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{1-0{,}01t^2}=-\frac{0{,}01}{3}\cdot\frac{1}{(1-0{,}01t^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{0{,}01}{3\cdot 27y^3};$$

отсюда

$$|\bar{v}|=\sqrt{\frac{1}{(15^2)}+\left(\frac{0{,}05x}{3y}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{15y}\cdot\sqrt{y^2+\frac{25x^2}{100^2}\cdot 25}=\frac{1}{15y}\cdot\sqrt{y^2+\frac{x^2}{16}};$$

$$\cos(\bar{v},\ \bar{i})=\frac{\dot{x}}{|\bar{v}|}=\frac{1\cdot 15y}{15\sqrt{y^2+\frac{x^2}{16}}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{x^2}{16}}};$$

$$\cos(\bar{v},\ \bar{j})=\frac{\dot{y}}{|\bar{v}|}=-\frac{0{,}05x\cdot 15y}{3y\sqrt{y^2+\frac{x^2}{16}}}=$$

$$=-\frac{0{,}25x}{\sqrt{y^2+\frac{x^2}{16}}}.$$

Так как

$$w_x=0, \quad \text{то} \quad |\bar{w}|=|w_y|=\frac{0{,}01}{3\cdot 27y^3}$$

и вектор ускорения параллелен оси y.

Пример 60

По заданным уравнениям движения точки найти ее скорость и ускорение:

1) $x = 20t - \sin 20t$,

$y = 1 - \cos 20t$ (см. пример 56.)

2) $x = R\cos^2 \omega t$,

$y = \frac{R}{2} \sin 2\omega t$,

$z = R \sin \omega t$.

Решение

1) $x = 20t - \sin 20t$,

$y = 1 - \cos 20t$.

Отсюда находим:

$$v_x = \dot{x} = 20 - 20\cos 20t = 20(1 - \cos 20t),$$

$$v_y = \dot{y} = 20 \sin 20t.$$

$$|\overline{v}| = 20\sqrt{(1 - \cos 20t)^2 + \sin^2 20t} =$$

$$= 20\sqrt{2 - 2\cos 20t} = 40 \sin 10t.$$

$$w_x = \ddot{x} = 400 \sin 20t,$$

$$w_y = \ddot{y} = 400 \cos 20t,$$

$$|\overline{w}| = 400\sqrt{\sin^2 20t + \cos^2 20t} = 400,$$

$$\cos(\overline{v}, \overline{i}) = \frac{\dot{x}}{|\overline{v}|} = \frac{20(1 - \cos 20t)}{40 \sin 10t} = \frac{2\sin^2 10t}{2 \sin 10t} = \sin 10t.$$

$$\cos(\overline{v}, \overline{j}) = \sin(\overline{v}, \overline{i}) = \frac{\dot{y}}{|\overline{v}|} = \frac{20 \sin 20t}{40 \sin 10t} =$$

$$= \frac{2 \sin 10t \cos 10t}{2 \sin 10t} = \cos 10t.$$

Следовательно, вектор скорости составляет с осью x угол, равный $\frac{\pi}{2} - 10t$ радиан.

Далее, $\cos(\overline{w}, \overline{i}) = \frac{\ddot{x}}{|\overline{w}|} = \frac{400 \sin 20t}{400} = \sin 20t$,

$$\cos(\overline{w}, \overline{j}) = \frac{\ddot{y}}{|\overline{w}|} = \frac{400 \cos 20t}{400} = \cos 20t.$$

Следовательно, ускорение $\overline{w}$ составляет с осью x угол, равный $\frac{\pi}{2} - 20t$ радиан.

2) $x = R\cos^2 \omega t$,

$$y = \frac{R}{2}\sin 2\omega t,$$
$$z = R\sin\omega t.$$

Отсюда находим:

$$v_x = \dot{x} = -2R\omega\cos\omega t\cdot\sin\omega t = -R\omega\sin 2\omega t,$$
$$v_y = \dot{y} = R\omega\cos 2\omega t,$$
$$v_z = \dot{z} = R\omega\cos\omega t,$$
$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} =$$
$$= R\omega\sqrt{\sin^2 2\omega t + \cos^2 2\omega t + \cos^2\omega t} =$$
$$= R\omega\sqrt{1 + \cos^2\omega t},$$
$$\cos(\bar{v},\ \bar{i}) = \frac{\dot{x}}{|\bar{v}|} = -\frac{R\omega\sin 2\omega t}{R\omega\sqrt{1+\cos^2\omega t}} =$$
$$= -\frac{\sin 2\omega t}{\sqrt{1+\cos^2\omega t}},$$
$$\cos(\bar{v},\ \bar{j}) = \frac{\dot{y}}{|\bar{v}|} = \frac{R\omega\cos 2\omega t}{R\omega\sqrt{1+\cos^2\omega t}} =$$
$$= \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{1+\cos^2\omega t}},$$
$$\cos(\bar{v},\ \bar{k}) = \frac{\dot{z}}{|\bar{v}|} = \frac{R\omega\cos\omega t}{R\omega\sqrt{1+\cos^2\omega t}} =$$
$$= \frac{\cos\omega t}{\sqrt{1+\cos^2\omega t}}.$$

Далее,

$$\ddot{x} = -2R\omega^2\cos 2\omega t,$$
$$\ddot{y} = -2R\omega^2\sin 2\omega t,$$
$$\ddot{z} = -R\omega^2\sin\omega t,$$
$$|\bar{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = R\omega^2\sqrt{4+\sin^2\omega t},$$
$$\cos(\bar{w},\ \bar{i}) = \frac{\ddot{x}}{|\bar{w}|} = \frac{-2R\omega^2\cos 2\omega t}{R\omega^2\sqrt{4+\sin^2\omega t}} =$$
$$= \frac{-2\cos 2\omega t}{\sqrt{4+\sin^2\omega t}},$$
$$\cos(\bar{w},\ \bar{j}) = \frac{\ddot{y}}{|\bar{w}|} = \frac{-2R\omega^2\sin 2\omega t}{R\omega^2\sqrt{4+\sin^2\omega t}} = \frac{-2\sin 2\omega t}{\sqrt{4+\sin^2\omega t}},$$
$$\cos(\bar{w},\ \bar{k}) = \frac{\ddot{z}}{|\bar{w}|} = \frac{-R\omega^2\sin\omega t}{Rw^2\sqrt{4+\sin^2\omega t}} =$$
$$= \frac{-\sin\omega t}{\sqrt{4+\sin^2\omega t}}.$$

§ 3. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе определения движения точки

(задачи 323, 324, 336—349)

Если заданы траектория движущейся точки и закон ее движения по этой траектории $s=f(t)$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его проекция на направление касательной определяется по формуле

$$v_\tau=\frac{ds}{dt}, \tag{52}$$

причем абсолютное значение этой проекции равно модулю скорости, т. е.

$$|v_\tau|=\left|\frac{ds}{dt}\right|=|v|.$$

Вектор ускорения определяется по его проекциям на естественные оси (касательную, главную нормаль и бинормаль)

$$w_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}, \quad w_n=\frac{v^2}{\rho}, \quad w_b=0, \tag{53}$$

где ρ — радиус кривизны траектории в данной точке.

Следовательно,

$$|w|=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_\tau}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{54}$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Если точка движется прямолинейно и неравномерно, то радиус кривизны траектории $\rho\to\infty$ и, следовательно, $w_n=0$.

В этом случае ускорение $\overline{w}$ направлено по прямолинейной траектории точки и по модулю равно:

$$w=|w_\tau|=\left|\frac{dv_\tau}{dt}\right|=\left|\frac{d^2s}{dt^2}\right|. \tag{55}$$

2. Если точка движется по кривой равномерно, то

$$v_\tau=\text{const} \text{ и } w_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=0,$$

а потому ускорение $\overline{w}$ направлено по нормали к траектории и по модулю равно:

$$w=w_n=\frac{v^2}{\rho}. \tag{56}$$

3. Если точка движется прямолинейно и равномерно, то

$$w_n=0, \quad w_\tau=0 \quad \text{и} \quad w=0.$$

Пример 61

Вагонетка движется равномерно по закруглению радиусом $R = 600$ *м*, причем ускорение ее центра тяжести равно $w = 0{,}0026$ *м/сек²*. Найти скорость центра тяжести вагонетки.

Решение

Так как центр тяжести вагонетки перемещается по окружности равномерно, то его ускорение $\overline{w}$ направлено по радиусу этой окружности к центру и согласно формуле по модулю равно

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Но радиус кривизны окружности равен ее радиусу, а потому

$$w = \frac{v^2}{R},$$

откуда

$$v^2 = R \cdot w$$

и

$$v = \sqrt{R \cdot w} = \sqrt{0{,}0026 \cdot 600} = \sqrt{1{,}56} = 1{,}25 \ \frac{м}{сек^2}.$$

Пример 62

Точка движется с постоянным тангенциальным ускорением a по окружности радиусом R без начальной скорости. Через сколько секунд после начала движения касательное и нормальное ускорения станут численно равны между собой?

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулами (53)

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = a,$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

Интегрируя уравнение $dv = a \cdot dt$, будем иметь:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a dt,$$

отсюда, принимая во внимание, что $v_0 = 0$ и $a = \text{const}$, находим $v = a \cdot t$ и, следовательно,

$$w_n = \frac{a^2 t^2}{R}.$$

В искомый момент времени t_1 касательное и нормальное ускорения равны между собой, а потому

$$\frac{a^2t_1^2}{R} = a,$$

откуда

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Пример 63

Точка движется по окружности; в некоторый момент ее скорость равна v, а ускорение $\overline{w}$ направлено по хорде $MN = l$. Зная v и l, найти ускорение точки в этот момент (рис. 94).

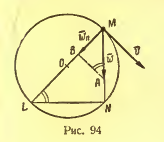


Рис. 94

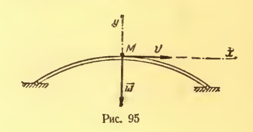


Рис. 95

Решение

Пусть на рис. 94 векторы $\overline{MA}$ и $\overline{MB}$ обозначают соответственно ускорения $\overline{w}$ и $\overline{w}_n$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников MAB и MLN имеем:

$$\frac{w}{w_n} = \frac{ML}{MN} = \frac{2R}{l},$$

отсюда

$$w = \frac{2R}{l} w_n = \frac{2R}{l} \cdot \frac{v^2}{\rho} = \frac{2R}{l} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{2v^2}{l}.$$

Пример 64

Паровоз идет по выпуклому мосту с постоянной скоростью $v = 72$ *км/час*. Центр тяжести паровоза описывает при этом параболу $y = -0{,}005x^2$, где x и y выражены в метрах. Найти величину ускорения центра тяжести паровоза в вершине параболы (рис. 95).

Решение

Искомое ускорение определяем по его проекциям на естественные оси; так как $v = \text{const}$, то $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ и, следовательно, $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$.

Но $v = 72$ *км/час* $= 20$ *м/сек*, а потому $w = \frac{409}{\rho}$.

Определим теперь величину ρ. Так как уравнение траектории задано, то для определения радиуса кривизны воспользуемся формулой

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}, \text{ где } y' = \frac{dy}{dx} = -0{,}01x$$

и

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -0{,}01.$$

Следовательно, $\rho = \frac{(1+0{,}0001x^2)^{\frac{3}{2}}}{0{,}01}$

и

$$w = \frac{400 \cdot 0{,}01}{(1+0{,}0001x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{(1+0{,}0001x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как для вершины параболы $x = 0$, то $w = 4$ *м/сек*^{2}.

§ 4. Комбинированные задачи

(задачи 312, 353, 355—358, 367—369, 371, 373)

К задачам этого типа относятся такие задачи, в которых требуется, исходя из уравнений движения точки в декартовых координатах, найти закон движения точки по ее траектории, т. е. выразить дуговую координату s в функции времени, а также найти касательное и нормальное ускорения точки и радиус кривизны траектории.

Чтобы найти закон движения точки по ее траектории, нужно из заданных уравнений движения определить скорость v и составить уравнение: $ds = v \cdot dt$.

Отсюда, интегрируя, получим

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} v\, dt$$

или

$$s = s_0 + \int_{0}^{t} v dt,$$

где s_0 — значение дуговой координаты s при $t = 0$.

Касательное ускорение определяется по формуле:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}{dt}; \tag{57}$$

после этого нормальное ускорение можно найти из равенства

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}, \tag{58}$$

где

$$w^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2.$$

Определив w_n, найдем радиус кривизны по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}. \tag{59}$$

Пример 65

Даны уравнения движения точки:

$$x = akt,$$

$$y = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = a \operatorname{ch}(kt).$$

Найти траекторию, закон движения точки по траектории и радиус кривизны траектории в зависимости от ординаты y.

Решение

Чтобы найти траекторию, достаточно исключить из уравнений движения время t; для этого найдем значение t из первого уравнения и подставим его во второе. Тогда будем иметь:

$$t = \frac{x}{ak}, \quad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Следовательно, траектория точки есть цепная линия. Далее, находим скорость v:

$$v_x = \dot{x} = ak.$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{ak}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = ak \operatorname{sh}(kt),$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = ak\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(kt)} = ak \operatorname{ch}(kt) =$$

$$= \frac{ak}{2}(e^{kt} + e^{-kt}).$$

Предполагаем, что $s_0 = 0$; теперь будем иметь:

$$s = \int_0^t v \cdot dt = \frac{ak}{2}\int (e^{kt} + e^{-kt})\,dt = \frac{a}{2}(e^{kt} - e^{-kt}) = a \operatorname{sh}(kt).$$

Ускорения w, w_τ и w_n находим по формулам (51), (57) и (58)

$$w_x = \ddot{x} = 0,$$

$$w_y = \ddot{y} = \frac{ak^2}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = ak^2 \operatorname{ch}(kt),$$

$$|\overline{w}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \frac{ak^2}{2}(e^{kt} + e^{-kt}) = ak^2 \operatorname{ch}(kt),$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dak \operatorname{sh}(kt)}{dt} = \frac{ak^2}{2}(e^{kt} - e^{-kt}),$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = ak^2 \sqrt{\operatorname{ch}^2(kt) - \operatorname{sh}^2(kt)} = ak^2.$$

Теперь по формуле (59) находим радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{a^2k^2(e^{kt} + e^{-kt})^2}{4ak^2} = \frac{a}{4}(e^{kt} + e^{-kt})^2.$$

Но

$$e^{kt} + e^{-kt} = \frac{2y}{a},$$

поэтому

$$\rho = \frac{a}{4} \cdot \frac{4y^2}{a^2} = \frac{y^2}{a}.$$

Пример 66

Даны уравнения движения точки:

$$x = 2t, \quad y = 4t^2, \quad z = 3t^2,$$

причем x, y, z выражены в метрах.

Найти радиус кривизны траектории в точке, где скорость v движущейся точки равна 5 *м/сек*.

Решение

Скорость и ускорение движущейся точки находим по формулам (48) и (49):

$$\dot{x} = 2, \ \dot{y} = 8t, \ \dot{z} = 6t, \ |\overline{v}| = \sqrt{4 + 64t^2 + 36t^2} = 2\sqrt{1 + 25t^2},$$

$$\ddot{x} = 0, \ \ddot{y} = 8, \ \ddot{z} = 6, \ |\overline{w}| = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

Далее, находим w_τ, w_n и ρ по формулам (57), (58), и (59)

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \cdot 50t}{2\sqrt{1 + 25t^2}} = \frac{100t}{v},$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{100 - \frac{100^2t^2}{v^2}} = \frac{10}{v}\sqrt{v^2 - 100t^2} = \frac{20}{v},$$

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^3}{20} = \frac{5^3}{20} = \frac{25}{4} = 6{,}25 \text{ м}.$$

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси.

Прямая, соединяющая две неподвижные точки тела, называется осью вращения этого тела.

Если выбрать две плоскости, проходящие через ось вращения, причем одна из них неподвижна, а вторая неизменно связана с вращающимся телом, то угол φ между этими двумя плоскостями, измеряемый в радианах и отсчитываемый в направлении, противоположном движению часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси вращения, определяет положение тела в любой момент времени t и является непрерывной однозначной функцией времени (рис. 96), т. е.

$$\varphi = f(t). \qquad (60)$$

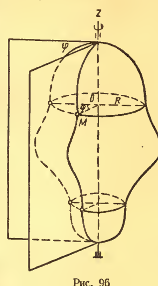


Рис. 96

Равенство (60) называется уравнением, или законом вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Угол $\varphi - \varphi_0$ называется углом поворота, или угловым перемещением тела.

Первая и вторая производные по времени от угла φ называются соответственно угловой скоростью и угловым ускорением тела и обозначаются буквами ω и ε, т. е.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t), \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = f''(t). \qquad (61)$$

При этом $[\omega] = \frac{радиан}{сек} = \frac{1}{сек} = сек^{-1}$

и

$$[\varepsilon] = \frac{радиан}{сек^2} = \frac{1}{сек^2} = сек^{-2}.$$

Если число оборотов в минуту вращающегося тела равно n, то

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}. \qquad (62)$$

Задачи, относящиеся к вращательному движению твердого тела вокруг неподвижной оси, можно разделить на три основных типа:

1) определение углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения тела;

2) определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела;

3) задачи, относящиеся к передаче вращательного движения от одного тела к другому.

§ 1. Определение угла поворота, угловой скорости и углового ускорения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

(Задачи 375—385)

Если $\omega = \text{const}$ и, следовательно, $\varepsilon = 0$, то вращение тела называется равномерным; в этом случае

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{63}$$

Если $\varepsilon = \text{const}$, то вращение тела называется равномерно-переменным; в этом случае

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{64}$$

Если $\omega_0 > 0$, то при $\varepsilon > 0$ вращение тела — равноускоренное, а при $\varepsilon < 0$, вращение тела — равнозамедленное.

Пример 67

С момента выключения мотора пропеллер аэроплана, вращающийся с угловой скоростью, соответствующей $n = 1\,200$ *об/мин*, сделал до остановки 80 оборотов.

Найти, сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки пропеллера, считая его вращение равномерно замедленным.

Решение

Так как вращение пропеллера — равномерно-замедленное, то по формулам (64), считая $\varphi_0 = 0$, будем иметь:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

причем

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \, \frac{1}{сек}.$$

Так как пропеллер сделал 80 оборотов, то угол поворота равен $\varphi = 80 \cdot 2\pi = 160\pi$ радиан.

Так как, кроме того, в момент остановки угловая скорость пропеллера равна нулю, то $\omega = 0$.

Таким образом, получаем два уравнения:

$$40\pi t+\frac{\varepsilon t^2}{2}=160\pi,$$

$$40\pi+\varepsilon t=0.$$

Отсюда находим:

$$\varepsilon=-\frac{40\pi}{t}$$

и

$$40\pi t-\frac{40\pi}{t}\frac{t^2}{2}=160\pi;$$

следовательно,

$$t=\frac{160\pi}{20\pi}=8\ сек.$$

Пример 68

В период разгона маховик вращается вокруг своей оси по закону

$$\varphi=\frac{\pi}{4}t^3.$$

Определить угловую скорость и угловое ускорение маховика в момент, когда он сделает 27 оборотов.

Решение

По формулам (61) находим:

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{3}{4}\pi t^2,$$

$$\varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{3}{2}\pi t.$$

Далее, находим в какой момент времени t угол поворота φ будет равен $27\cdot 2\pi=54\pi$ *рад.*

$$\varphi=\frac{\pi}{4}t^3=54\pi;$$

отсюда

$$t=\sqrt[3]{54\cdot 4}=6\ сек.$$

Угловая скорость и угловое ускорение в этот момент будут равны

$$\omega=\frac{3}{4}\pi\cdot 6^2=27\pi\ \frac{1}{сек},$$

$$\varepsilon=\frac{3}{2}\pi\cdot 6=9\pi\frac{1}{сек^2}.$$

§ 2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

(задачи 386 — 394)

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то любая его точка, не лежащая на оси вращения, описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к этой оси, а скорость и ускорение точки определяются по формулам:

$$v=R\omega,\ w_\tau=R\varepsilon,\ w_n=R\omega^2,\ w=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}, \qquad (65)$$

где R — расстояние движущейся точки от оси вращения.

Векторы скорости $\overline{v}$ и касательного ускорения $\overline{w_\tau}$ направлены по касательной к окружности, описываемой данной точкой тела, а вектор нормального ускорения $\overline{w_n}$ направлен по радиусу этой окружности к ее центру.

Если вращение тела ускоренное, то векторы $\overline{v}$ и $\overline{w_\tau}$ направлены в одну и ту же сторону; в случае же замедленного вращения — в противоположные стороны.

Если тело вращается равномерно, то $\omega=\mathrm{const}$; следовательно, в этом случае $v=\mathrm{const}$; $\varepsilon=0$, $w_\tau=0$ и

$$\overline{w}=\overline{w_n}, \qquad (66)$$

т. е. вектор ускорения $\overline{w}$ совпадает в этом случае с нормальным (центростремительным) ускорением.

Пример 69

Колесо радиусом $R=1$ *м* вращается равномерно вокруг своей оси, делая один оборот за 0,25 *сек*. Найти скорость и ускорение точки, лежащей на ободе колеса.

Решение

Так как колесо вращается равномерно, то согласно формуле (63),

$$\omega=\frac{\varphi-\varphi_0}{t}.$$

Но за время $t=0{,}25$ *сек* угол поворота колеса равен:

$$\varphi-\varphi_0=2\pi\ \textit{рад.},$$

поэтому

$$\omega=\frac{2\pi}{0{,}25}=8\pi\,\frac{1}{\textit{сек}}.$$

Далее, по формулам (65) будем иметь:

$$v=R\omega=1\cdot 8\pi\ \textit{м/сек}\approx 25{,}12\ \textit{м/сек},$$

$$w=w_n=R\cdot\omega^2=1\cdot 64\pi^2=631{,}04\ \textit{м/сек}^2.$$

Пример 70

Вал начинает вращаться с угловой скоростью

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{сек}$$

равноускоренно и за 10 *сек* делает 30 оборотов. Найти ускорение точки, отстоящей от оси вращения вала на расстоянии, равном 0,5 *м*, в тот момент, когда скорость этой точки равна 2π *м/сек*.

Решение

Для определения углового ускорения вала воспользуемся формулами (64), считая $\varphi_0 = 0$, $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$. Но при $t = 10$ *сек* угол поворота равен $\varphi = 30 \cdot 2\pi = 60\pi$ *рад*, а потому $2\pi \cdot 10 + 50\varepsilon = 60\pi$, откуда $\varepsilon = \frac{40\pi}{50} = 0{,}8\pi \frac{1}{сек^2}$.

Далее по формулам (65) находим:

$$w = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}5\sqrt{0{,}64\pi^2 + \omega^4} \text{ и } v = R\omega = 0{,}5\omega.$$

В момент, когда $v = 2\pi$ *м/сек*, будем иметь:

$$\omega = \frac{v}{0{,}5} = 4\pi \frac{1}{сек} \text{ и } w = 0{,}5\sqrt{0{,}64\pi^2 + 4^4\pi^4} =$$
$$= 4\pi \cdot \sqrt{4\pi^2 + 0{,}01} \approx 8\pi^2 = 79 \text{ м/сек}^2.$$

Пример 71

Маятник, подвешенный на нити длиной $l = 384$ *см*, колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси O по закону

$$\varphi = \frac{\pi}{16} \sin \frac{3}{4} \pi t,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали (в радианах). Определить скорость и ускорение маятника в момент, когда угловая скорость достигает наибольшей величины (рис. 97).

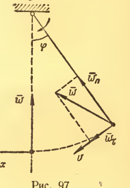


Рис. 97

Решение

Найдем сначала угловую скорость и угловое ускорение маятника по формулам (61):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{16} \frac{3}{4} \pi \cos \frac{3}{4} \pi t = \frac{3\pi^2}{64} \cos \frac{3}{4} \pi t,$$
$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{9\pi^3}{256} \sin \frac{3}{4} \pi t.$$

Теперь по формулам (65) получим:

$$v = l\,\omega = \frac{3\pi^2}{64}\, l \cos\frac{3}{4}\pi t,$$

$$w_\tau = l\varepsilon = -\frac{9\pi^2}{256}\, l \sin\frac{3}{4}\pi t.$$

$$w_n = l\omega^2 = l\cdot\frac{9\pi^4}{64^2}\cos^2\frac{3}{4}\pi t.$$

Скорость v достигает наибольшей величины в момент t_1, когда

$$\left(\cos\frac{3}{4}\pi t_1\right) = 1;$$

отсюда

$$\frac{3}{4}\pi t_1 = k\cdot\pi,$$

т. е.

$$t_1 = \frac{4}{3}k,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ следовательно, $t_1 = 0{,}4/3,\ 8/3\ldots$ *сек*.

В эти моменты будем иметь:

$$v_{\max} = \frac{3\pi^2}{64}\, l = 384\,\frac{3\pi^2}{64} = 18\pi^2 \approx 177{,}5\ \textit{см/сек},$$

$$w_{1\tau} = 0$$

и

$$w_1 = w_{1n} = l\cdot\frac{9\pi^4}{64^2} \approx 82{,}3\ \textit{см/сек}^2.$$

Так как при $t_1 = 0,\ 4/3,\ 8/3\ldots$ угол отклонения маятника от вертикали

$$\varphi = \frac{\pi}{16}\sin\frac{3}{4}\pi t_1 = 0,$$

то наибольшую скорость маятник имеет в момент, когда он проходит через низшее положение.

§ 3. Передача вращательного движения от одного тела к другому

(задачи 395—406)

Пример 72

Шкив *I* радиусом $O_1B = r_1$, вращаясь равномерно, делает n оборотов в минуту; он соединен бесконечным ремнем со шкивом *II*, имеющим радиус $O_2C = r_2$. Определить скорость и ускорение точки A шкива *III* радиусом $O_2A = R$, неизменно соединенного со шкивом *II* (рис. 98).

Решение

Так как все точки ремня имеют равные скорости, то

$$v_B = v_C,$$

или

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости шкивов I и II, или

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1},$$

т. е. угловые скорости шкивов, соединенных бесконечным ремнем, обратно пропорциональны их радиусам.

Отсюда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Но, согласно формуле (62)

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30},$$

поэтому

$$\omega_2 = \frac{\pi n}{30} \frac{r_1}{r_2} = \text{const}.$$

Так как шкив III ,которому принадлежит точка A, неизменно соединен со шкивом II, то их угловые скорости равны и, следовательно, скорость точки A равна

$$v_A = \omega_2 R = \frac{\pi n}{30} \frac{r_1}{r_2} R.$$

Так как $\omega_2 = \text{const}$, то ускорение $\overline{w_A}$ точки A равно нормальному (центростремительному) ускорению этой точки, и, следовательно,

$$w_A = R\,\omega_2^2 = \frac{\pi^2 n^2 r_1^2}{900 r_2^2} R.$$

Рис. 98

Пример 73

Зубчатое колесо I с числом зубцов $z_1 = 80$ начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя с угловым ускорением

$$\varepsilon_1 = \pi \frac{1}{сек^2}$$

и приводит в движение находящееся с ним во внутреннем зацеплении колесо II с числом зубцов $z_2=20$.

Определить угловую скорость колеса II и ускорение точки B, лежащей на ободе этого колеса через 1 *сек* после начала движения, если радиус колеса II равен $r_2=15$ *см* (см. рис. 99).

Решение

Допустим, что колесо I вращается в направлении, противоположном движению часовой стрелки; тогда скорость точки C зацепления колес будет направлена, как указано на рис. 99, и, следовательно, колесо II будет вращаться в том же направлении, что и колесо I, т. е. против часовой стрелки.

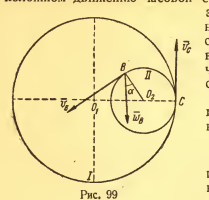


Рис. 99

Для скорости точки C, как принадлежащей одновременно и колесу I и колесу II, будем иметь:

$$v_C=\omega_1\cdot r_1=\omega_2\cdot r_2,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости колес I и II, а r_1 и r_2 — их радиусы. Следовательно $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}$.

Но $2\pi r_1=z_1 h$, а $2\pi r_2=z_2\cdot h$, где h — шаг (ширина) зубца; отсюда $\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2}=\frac{z_1\cdot h}{z_2\cdot h}$, или $\frac{r_1}{r_2}=\frac{z_1}{z_2}$. А поэтому $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{z_2}{z_1}$, т. е. угловые скорости сцепленных зубчатых колес обратно пропорциональны числам их зубцов.

Следовательно,

$$\omega_2=\omega_1\frac{z_1}{z_2}=\frac{80}{20}\omega_1=4\omega_1,$$

но, согласно формуле (64),

$$\omega_1=\varepsilon_1 t=\pi t,$$

поэтому

$$\omega_2=4\pi t\frac{1}{сек}.$$

При $t=1$ *сек*

$$\omega_2=4\pi\frac{1}{сек}.$$

Угловое ускорение колеса II будет равно:

$$\varepsilon_2=\frac{d\omega_2}{dt}=4\pi\frac{1}{сек^2}.$$

Теперь по формуле (65) находим ускорение точки B:

$$w_B=r_2\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4}=15\sqrt{(4\pi)^2+(4\pi t)^4}=$$
$$=60\pi\sqrt{1+16\pi^2t^4}.$$

При $t=1$ *сек*

$$w_B = 60\pi\sqrt{1+16\pi^2} \approx 60\pi\cdot 4\pi \approx 2{,}4\pi^2 \ м/сек^2.$$

Направление ускорения $\overline{w}_B$ определяется углом α между радиусом $\overline{O_2B}$ и вектором $\overline{w}_B$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon_2}{\omega_2^2} = \frac{4\pi}{16\pi^2} = \frac{1}{4\pi} = 0{,}079, \quad \text{откуда } \alpha = 4^\circ 30'.$$

ГЛАВА III

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Если при движении твердого тела расстояние от любой его точки до данной неподвижной плоскости не изменяется, то такое движение тела называется **плоскопараллельным.**

Изучение плоскопараллельного движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры, движущейся в своей плоскости (сечения тела плоскостью, параллельной данной неподвижной плоскости).

Задачи, относящиеся к плоскопараллельному движению тела, можно разбить на следующие основные типы:

1. Составление уравнений плоскопараллельного движения твердого тела (уравнений движения плоской фигуры).
2. Определение скоростей точек плоской фигуры.
3. Нахождение подвижной и неподвижной центроид.
4. Определение ускорений точек плоской фигуры.

§ 1. Уравнения движения плоской фигуры

(задачи 492—500)

Положение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости вполне определяется положением двух произвольных ее точек A и B.

Следовательно, изучение движения плоской фигуры в ее плоскости сводится к изучению движения прямолинейного отрезка AB, с которым фигура неизменно связана. Но положение отрезка AB определяется положением, т. е. двумя координатами x_A и y_A его точки A, называемой полюсом, и углом φ, который образует этот отрезок с некоторой осью неизменного направления, лежащей в плоскости данной фигуры (рис. 100).

Таким образом, движение плоской фигуры, движущейся в своей плоскости, можно определить следующими тремя уравнениями:

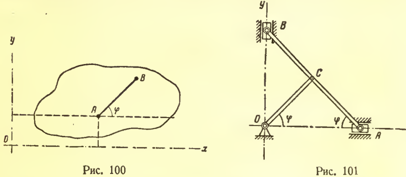
$$\left.\begin{aligned} x_A &= f_1(t), \\ y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Уравнения (67) называются уравнениями движения плоской фигуры или уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела.

Из этих уравнений следует, что движение плоской фигуры можно разложить на два движения: 1) поступательное движение, определяемое первыми двумя уравнениями (67), и 2) вращательное движение вокруг полюса, определяемое третьим из уравнений (67)

Пример 74

Линейка AB эллипсографа приводится в движение кривошипом OC, вращающимся равномерно вокруг оси O, с угловой



скоростью $\omega = \text{const}$. Принимая точку A за полюс, составить уравнения движения линейки эллипсографа, если (рис. 101)

$$OC = BC = AC = r.$$

Решение

Так как точка A движется по оси Ox, то $y_A = 0$. Если угол, образуемый линейкой AB с осью x, обозначим φ, то из равнобедренного треугольника AOC, в котором $\angle COA = \angle CAO = \varphi$, будем иметь: $AO = 2OC \cdot \cos\varphi$, или $x_A = 2r \cdot \cos\varphi$.

При равномерном вращении угол AOC поворота кривошипа за t *сек* будет равен ωt, т. е.

$$\varphi = \omega t.$$

Таким образом, уравнения движения линейки AB имеют вид:

$$\begin{aligned} x_A &= 2r\cos(\omega t), \\ y_A &= 0, \\ \varphi &= \omega t. \end{aligned}$$

Пример 75

Шестеренка радиусом r, катящаяся внутри неподвижной шестерни радиусом R, приводится в движение кривошипом OA, вращающимся равномерно вокруг оси O этой шестерни с угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Составить уравнения движения подвижной шестеренки, принимая ее центр A за полюс (рис. 102)

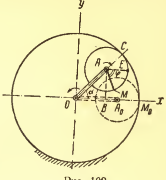


Рис. 102

Решение

Найдем координаты x_A, y_A полюса A.

Из треугольника OAB имеем:

$$x_A = OB = OA \cos\alpha,$$
$$y_A = AB = OA \sin\alpha,$$

но $OA = OC - AC = R - r$ и $\alpha = \omega t$, как угол поворота кривошипа при равномерном вращении.

Следовательно,

$$x_A = (R - r)\cos\omega t,$$
$$y_A = (R - r)\sin\omega t.$$

Далее нужно найти угол поворота подвижной шестеренки вокруг полюса A. Для этого рассмотрим радиус AM подвижной шестеренки, который в начальный момент занимал положение A_0M_0.

Тогда угол поворота будет равен $\angle EAM = \varphi$.

При этом отрезок AE *параллелен* оси x, и, следовательно, $\angle CAE = \alpha$. Так как качение подвижной шестеренки по неподвижной происходит без скольжения, то

$$\breve{CM_0} = \breve{CM}.$$

Но

$$\breve{CM_0} = R\,\alpha$$

и

$$\breve{CM} = r(\varphi + \alpha),$$

а поэтому

$$r(\alpha + \varphi) = R\,\alpha,$$

откуда

$$\varphi = \alpha\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega t.$$

Таким образом, искомые уравнения движения будут:

$$x_A = (R - r)\cos\omega t,$$
$$y_A = (R - r)\sin\omega t,$$
$$\varphi = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega t.$$

§ 2. Определение скоростей точек плоской фигуры, движущейся в своей плоскости

(задачи 501—538)

Движение плоской фигуры в ее плоскости можно разложить на два движения:

1) поступательное движение со скоростью, равной скорости какой-либо точки A тела, принятой за полюс, и

2) вращательное движение вокруг этого полюса (вокруг оси, проходящей через полюс и перпендикулярной к плоскости движущейся фигуры). При этом угловая скорость вращательного движения *не зависит от выбора полюса*. Отсюда следует, что скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме двух скоростей: скорости полюса $\bar{v}_A$ и скорости точки B во вращательном движении вокруг полюса, т. е.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{68}$$

(см. задачи 506, 507, 511).

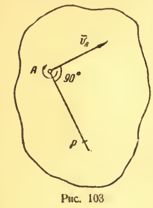


Рис. 103

Кроме того, скорость любой точки фигуры можно определить и при помощи мгновенного центра скоростей.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется такая *точка P плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю*.

Если известны скорость $\bar{v}_A$ какой-либо точки A плоской фигуры и угловая скорость этой фигуры, то, повернув вектор $\bar{v}_A$ вокруг точки A на 90° в направлении вращения фигуры и отложив на этой полупрямой отрезок

$$AP = \frac{v_A}{\omega}, \tag{69}$$

получим точку P, которая является МЦС (рис. 103).

Если же известны направления скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находят как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в этих точках к направлениям их скоростей.

Если мгновенный центр скоростей P найден и если известна угловая скорость ω фигуры, то скорость любой точки M фигуры определяется как скорость этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей, т. е. вектор $\bar{v}_M$ перпендикулярен к отрезку PM и по модулю равен произведению $\omega \cdot PM$.

Отсюда следует, что скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, т. е.

$$\frac{v_M}{v_N} = \frac{PM}{PN}. \qquad (70)$$

Если известны скорость $\bar{v}_A$ точки A фигуры и *направление* скорости точки B, то модуль скорости $\bar{v}_B$ можно определить также, воспользовавшись теоремой о проекциях скоростей точек плоской фигуры: *проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.*

Из задач, относящихся к этому параграфу, следует обратить внимание на такие задачи, в которых имеются плоские механизмы, состоящие из нескольких звеньев (например, задачи 517, 533, 536—538). При решении этих задач рассматривают последовательно движения отдельных звеньев механизма, начиная с того звена, движение которого задано, и при переходе от одного звена к другому определяют скорости тех точек, которые являются общими для этих двух звеньев механизма. Следует подчеркнуть, что мгновенный центр скоростей можно находить только для каждого звена в отдельности; то же относится и к угловым скоростям (см. пример 76).

Пример 76

Стержень AB длиной 5 *м* опирается на неподвижное ребро C двугранного угла и движется в плоскости чертежа так, что нижний его конец A скользит по горизонтальной оси x со скоро-

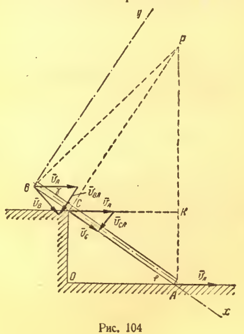


Рис. 104

стью, равной $v_A = 4$ *м/сек*. Определить угловую скорость ω и скорости точек B и C стержня в момент, когда угол $\varphi = 30°$, если $OC = 2$ *м* (рис. 104).

Решение

1-й способ. Скорость точки A направлена по оси Ox, а скорость точки C стержня AB направлена вдоль этого стержня.

Принимая точку A, скорость которой задана, за полюс, будем иметь:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA},$$

причем вращательная скорость $\bar{v}_{CA}$ точки C вокруг полюса A перпендикулярна к AC.

Проектируя это векторное равенство на оси x и y, направленные как указано на рисунке, будем иметь:

$$v_C = v_A \cos\varphi,$$
$$v_A \sin\varphi - v_{CA} = 0,$$

откуда

$$v_C = v_A \cos\varphi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46 \text{ м/сек}$$

и

$$v_{CA} = v_A \sin\varphi = 4 \, \frac{1}{2} = 2 \text{ м/сек}.$$

С другой стороны,

$$v_{CA} = \omega \, AC = \omega \, \frac{OC}{\sin\varphi} = 4\omega,$$

поэтому

$$\omega = \frac{v_{CA}}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \, \frac{1}{сек}.$$

Переходя к определению скорости точки B, будем иметь: $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, причем вращательная скорость $\bar{v}_{BA}$ точки B вокруг полюса A перпендикулярна к AB и по модулю равна

$$v_{BA} = AB \, \omega = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \text{ м/сек}.$$

Так как угол в треугольнике скоростей, лежащий против стороны $\bar{v}_B$, равен $90° - \varphi = 60°$,
то

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 - 2v_A \cdot v_{BA} \cdot \cos 60°} =$$
$$= \sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 3{,}5 \text{ м/сек}.$$

Направление вектора $\bar{v}_B$ найдем по теореме синусов из того же треугольника скоростей:

$$\frac{v_B}{\sin 60^\circ}=\frac{v_{BA}}{\sin\gamma},$$

где γ — угол между векторами $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$; отсюда

$$\sin\gamma=\frac{v_{BA}\cdot\sin 60^\circ}{v_B}=\frac{2{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3{,}5}=0{,}618 \text{ и } \gamma=38^\circ.$$

2-й способ. Скорости точек C и B и угловую скорость стержня AB можно найти и другим способом, построив мгновенный центр скоростей стержня AB, как точку P пересечения прямых AP и CP, перпендикулярных к скоростям $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_C$. Тогда

$$\frac{v_A}{PA}=\frac{v_B}{PB}=\frac{v_C}{PC}=\omega.$$

Расстояния PA и PC находим из треугольника APC, а расстояние PB — из треугольника BPC:

$$PA=\frac{AC}{\sin\varphi}=\frac{4}{\sin 30^\circ}=8 \text{ м},$$

$$PC=AC\ \mathrm{ctg}\,\varphi=4\cdot\mathrm{ctg}\,30^\circ=4\sqrt{3} \text{ м},$$

$$PB=\sqrt{BC^2+PC^2}=\sqrt{1+48}=7 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$\omega=\frac{v_A}{AP}=\frac{4}{8}=0{,}5\,\frac{1}{сек}.$$

$$v_C=\omega PC=0{,}5\cdot 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}\approx 3{,}46 \text{ м/сек},$$

$$v_B=\omega\cdot PB=0{,}5\cdot 7=3{,}5 \text{ м/сек}.$$

Вектор $\bar{v}_B$ перпендикулярен к отрезку PB.

Пример 77

Кривошип $O_1A=20$ *см* делает 120 оборотов в минуту и при помощи звена AB приводит в движение стержень $O_2B=60$ *см*, закрепленный шарнирно в точке O_2. Определить угловую скорость стержня O_2B в момент, когда кривошип O_1A займет вертикальное положение, если известно, что в этот момент звено AB образует с вертикалью $\angle O_1AB=60^\circ$, и $\angle ABO_2=30^\circ$ (рис. 105).

Решение

1-й способ. Данный механизм состоит из трех звеньев:

1) кривошипа O_1A, вращающегося вокруг оси O_1 с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 4\pi \frac{1}{сек};$$

2) стержня O_2B, вращающегося вокруг оси O_2;
3) стержня AB, движущегося в плоскости чертежа.

Найдем скорость точки A. Вектор $\bar{v}_A$ перпендикулярен к радиусу вращения O_1A и по модулю равен

$$v_A = \omega\ O_1A = 4\pi \cdot 20 = 80\pi\ см/сек.$$

Далее рассмотрим точку B.

Так как точка B принадлежит звену O_2B, вращающемуся вокруг неподвижной точки O_2, то скорость $\bar{v}_B$ точки B перпендикулярна к O_2B.

Зная модуль и направление скорости точки A и направление скорости точки B, можно найти модуль скорости $\bar{v}_B$, воспользовавшись теоремой о равенстве проекций скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки. Будем иметь:

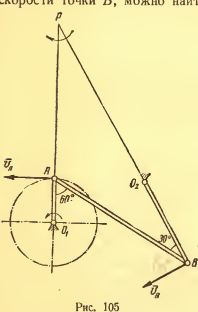


Рис. 105

$$пр_{BA}\bar{v}_A = пр \cdot _{BA}\bar{v}_B,$$

или

$$v_A\ \cos 30° = v_B \cdot \cos 60°,$$

откуда

$$v_B = v_A \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = v_A \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 80\pi \sqrt{3}\ см/сек.$$

Теперь, зная скорость точки B, находим угловую скорость стержня O_2B:

$$\omega_1 = \frac{v_B}{O_2B} = \frac{80\pi\sqrt{3}}{60} = \frac{4\pi \cdot \sqrt{3}}{3}\ \frac{1}{сек}.$$

2-й способ. Находим мгновенный центр вращения P звена AB, как точку пересечения прямых O_1A и O_2B, перпендикулярных к скоростям $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Так как скорости точек звена AB пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра вращения этого звена, то

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB},$$

откуда

$$v_B = v_A\ \frac{PB}{PA}.$$

Из треугольника ABP имеем:

$$\frac{PB}{PA}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 1}=\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$v_B=v_A\sqrt{3}$$

и

$$\omega_1=\frac{v_B}{O_2B}.$$

§ 3. Центроиды

(задачи 542, 544—549, 552, 553)

Геометрическое место мгновенных центров вращения (мгновенных центров скоростей) на *неподвижной плоскости,* в которой движется плоская фигура, называется *неподвижной центроидой,* а геометрическое место тех же центров на плоскости самой движущейся фигуры называется *подвижной центроидой.*

В каждый данный момент подвижная и неподвижная центроиды касаются друг друга, и точка касания этих кривых является в данный момент мгновенным центром вращения (мгновенным центром скоростей) движущейся плоской фигуры.

Данное движение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить, построив подвижную и неподвижную центроиды и заставив первую катиться без скольжения по второй с соответствующей угловой скоростью.

Задачи, в которых требуется найти неподвижную и подвижную центроиды, решаются двумя способами: аналитическим и геометрическим.

При аналитическом способе определения центроид текущие координаты мгновенного центра вращения в неподвижной системе координат и текущие координаты того же центра в подвижной системе координат, неизменно связанной с движущейся фигурой, нужно выразить как функции времени, или другого переменного параметра (например, угла поворота фигуры): исключив затем этот переменный параметр, получим соответственно уравнения подвижной и неподвижной центроид (см. задачи 552, 553).

При геометрическом способе определения центроид искомые центроиды находят, исходя из геометрических соображений. Например, если расстояние мгновенного центра вращения от данной *неподвижной* точки оказывается постоянным, то неподвижная центроида есть окружность; если сумма расстояний мгновенного центра вращения от двух данных точек подвижной плоскости, т. е. плоскости самой движущейся фигуры, есть величина постоянная, то подвижная центроида есть эллипс, фокусы которого находятся в этих точках подвижной плоскости и т. п. (см. задачи 542, 547, 548).

Пример 78

Стержень $AB=l$ концами скользит по двум прямым OA и OB, образующим между собой угол $\alpha=45°$. Найти подвижную и неподвижную центроиды (рис. 106).

Решение

1-й способ (геометрический). Так как скорости точек A и B направлены соответственно по прямым OA и OB, то мгновенный центр вращения P стержня AB находим как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к прямым OA и OB. Поэтому углы α и APB равны как углы с перпендикулярными сторонами, т. е. $\angle APB=45°=\text{const}$. Отсюда следует, что подвижная центроида есть геометрическое место таких точек, из которых отрезок AB виден под одним и тем же

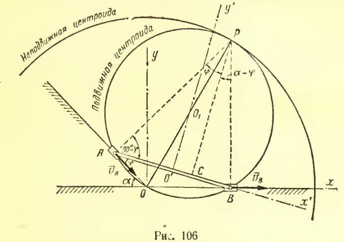


Рис. 106

углом, равным 45°. Как известно из геометрии, таким геометрическим местом является дуга APB окружности, описанной около треугольника APB; так как сумма углов APB и AOB равна 180°, то эта окружность проходит и через точку O. Но сторона треугольника равна диаметру описанного круга, умноженному на синус угла, противолежащего этой стороне; поэтому, обозначая радиус подвижной центроиды R, будем иметь:

$$l=2R\sin 45°,$$

откуда

$$R=\frac{l}{2\sin 45°}=\frac{\sqrt{2}l}{2}.$$

Так как $\angle OAP=90°$, то отрезок OP является диаметром подвижной центроиды, а потому $OP=2R=\sqrt{2}l=\text{const}$, т. е.

расстояние мгновенного центра вращения P от *неподвижной* точки O постоянно; отсюда следует, что неподвижная центроида есть окружность радиуса $OP=2R=\sqrt{2}l$ с центром в точке O.

2-й способ (аналитический). Построим две системы координатных осей: неподвижную Oxy и подвижную $O'x'y'$, неизменно связанную со стержнем AB, как указано на рис. 106; начало O' подвижной системы возьмем в середине отрезка AB. Если обозначим координаты точки P в неподвижной системе Oxy через x и y, а в подвижной системе $O'x'y'$ — через x' и y', то

$$x=OB,\quad y=BP,\quad x'=O'C,\quad y'=CP.$$

Обозначим, далее, переменный угол OAB через φ и выразим координаты x и y через этот угол. Из треугольников OAB и APB по теореме синусов имеем:

$$\frac{x}{\sin\varphi}=\frac{l}{\sin(180^\circ-\alpha)} \text{ и } \frac{y}{\sin(90^\circ-\varphi)}=\frac{l}{\sin\alpha};$$

отсюда находим

$$x=\frac{l}{\sin\alpha}\cdot\sin\varphi,\quad y=\frac{l}{\sin\alpha}\cos\varphi.$$

Чтобы найти геометрическое место точек P на неподвижной плоскости, т. е. получить уравнение неподвижной центроиды, нужно из этих уравнений исключить параметр φ. Для этого достаточно возвести каждое из этих уравнений в квадрат и затем их сложить. Тогда получим:

$$x^2+y^2=\frac{l^2}{\sin^2\alpha}=\frac{l^2}{\sin^2 45^\circ},$$

или

$$x^2+y^2=2l^2.$$

Отсюда видим, что неподвижная центроида есть окружность радиуса $\sqrt{2}l$ с центром в начале координат O.

Чтобы выразить теперь через угол φ координаты x' и y' точки P в подвижной системе осей, рассмотрим треугольники ACP и BCP, из которых имеем:

$$AC=CP\ \operatorname{tg}\varphi$$

и

$$CB=CP\ \operatorname{tg}(\alpha-\varphi),$$

или

$$\frac{l}{2}+x'=y'\operatorname{tg}\varphi$$

и

$$\frac{l}{2}-x'=y'\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)=y'\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}45\cdot\operatorname{tg}\varphi}y'=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\ y'.$$

Освобождаясь во втором уравнении от знаменателя, получим

$$\frac{l}{2}-x'+\left(\frac{l}{2}-x'\right)\operatorname{tg}\varphi=y'-y'\operatorname{tg}\varphi.$$

Чтобы найти геометрическое место точек P на подвижной плоскости, т. е. найти подвижную центроиду, нужно из этих двух уравнений исключить $\operatorname{tg}\varphi$. Из первого уравнения имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{l}{2}+x'}{y'}.$$

Подставляя это значение $\operatorname{tg}\varphi$ во второе уравнение, получим

$$\frac{l}{2}-x'+\frac{\frac{l^2}{4}-x'^2}{y'}=y'-\frac{l}{2}-x'$$

или

$$x'^2+y'^2-ly'=\frac{l^2}{4},$$

или

$$x'^2+\left(y'-\frac{l}{2}\right)^2=\frac{l^2}{2};$$

отсюда видим, что подвижная центроида есть окружность радиуса $\frac{l}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}l$ с центром в точке $O_1\left(0, \frac{l}{2}\right)$.

Пример 79

Стержень, согнутый в виде прямого угла ABC, перемещается так, что точка A движется по оси x, а сторона BC все время проходит через неподвижную точку D на оси y. Найти уравнения подвижной и неподвижной центроид, если $AB=OD=a$ (рис. 107)

Решение

1-й способ (геометрический). Скорость точки A направлена по оси Ox, а скорость точки D — вдоль стержня BC.

Мгновенный центр вращения P стержня ABC находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и D к скоростям этих точек. Так как прямоугольные треугольники ABE и OED, в которых $\angle AEB=\angle OED$ и $AB=OD$, равны, то $AE=ED$, а потому из равенства треугольников APE и DPE заключаем, что $AP=DP$. Но, как известно из аналитической геометрии, геометрическое место точек, расстояния от которых до данной неподвижной точки (точки D) и до данной неподвижной прямой (прямой Ox) равны между собой, есть па-

рабола. Поэтому неподвижная центроида есть парабола, для которой прямая Ox является директрисой, а точка D — фокусом. Точно так же рассматривая геометрическое место точек P на подвижной плоскости, связанной со стержнем ABC, из равенства $AP = DP$ заключаем, что подвижная центроида есть парабола, для которой директрисой является прямая BC, а фокусом — точка A.

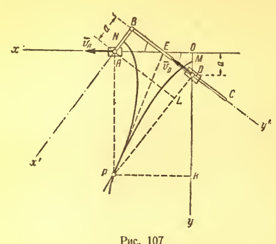


Рис. 107

2-й способ (аналитический). Если построим координаты x и y точки P в неподвижной системе Oxy, то

$$x = OA = PK, \quad y = OK = AP.$$

Из треугольника PDK имеем:

$$PD^2 = PK^2 + DK^2 = PK^2 + (OK - a)^2,$$

или, принимая во внимание, что $PD = AP$,

$$y^2 = x^2 + (y - a)^2 \quad \text{или} \quad x^2 = 2a\left(y - \frac{a}{2}\right).$$

Следовательно, неподвижная центроида есть парабола с осью Oy и с вершиной в точке $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.

Построив теперь координаты x' и y' точки P в подвижной системе осей $Bx'y'$, неизменно связанных со стержнем ABC, будем иметь:

$$x' = PD, \quad y' = BD.$$

Чтобы найти зависимость между x' и y', проведем отрезок AL, параллельный BD.
Тогда

$$LD = a, \quad AL = BD = y', \quad PL = x' - a$$

и

$$AP^2 = PL^2 + LA^2,$$

или

$$PD^2 = PL^2 + LA^2,$$

т. е.

$$x'^2 = (x' - a)^2 + y'^2,$$

или

$$y'^2 = 2a\left(x' - \frac{a}{2}\right).$$

Следовательно, подвижная центроида есть парабола с осью Bx' и с вершиной в точке $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

§ 4. Определение ускорений точек плоской фигуры

(задачи 557—578)

Ускорение любой точки движущейся плоской фигуры можно определить двумя способами: 1) как геометрическую сумму ускорений этой точки в поступательном и вращательном движениях фигуры и 2) как ускорение этой точки во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений, причем мгновенным центром ускорений называется такая точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю.

Рассмотрим сначала первый способ.

Если известны ускорение $\overline{w}_A$ некоторой точки A фигуры (ускорение полюса), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры, то ускорение любой ее точки B определяется по формуле:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^n + \overline{w}_{BA}^\tau = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}. \qquad (71)$$

Здесь вектор $\overline{w}_{BA}$ — ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A; $\overline{w}_{BA}^n$ и $\overline{w}_{BA}^\tau$ — касательная и нормальная составляющие этого ускорения.

Следовательно,

$$w_{BA}^{(n)} = \omega^2 \cdot AB, \quad w_{BA}^{(\tau)} = \varepsilon \cdot AB; \qquad (72)$$

при этом вектор $\overline{w}_{BA}^n$ направлен вдоль AB (от точки B к точке A), а вектор $\overline{w}_{BA}^\tau$ — перпендикулярен к AB.

Угол α между векторами $\overline{w}_{BA}$ и $\overline{AB}$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} a = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \qquad (73)$$

при этом в случае ускоренного вращения фигуры векторы $\overline{w}_{BA}$ и $\overline{v}_{BA}$ (вращательная скорость точки B вокруг полюса A)

лежат по одну сторону от прямой AB; в противном случае эти векторы расположены по разные стороны от этой прямой.

Если угловая скорость фигуры постоянна, т. е. $\omega = \text{const}$, то $\varepsilon = 0$, а следовательно, и $\alpha = 0$, т. е. вектор $\overline{w}_{BA}$ совпадает по направлению с вектором $\overline{BA}$. Если же в данный момент $\omega = 0$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и вектор $\overline{w}_{BA}$ перпендикулярен к вектору $\overline{BA}$.

На основании равенства (71) ускорение точки B можно найти либо геометрически — построением многоугольника ускорений, либо аналитически — методом проекций, для чего векторное равенство нужно спроектировать на выбранные координатные оси.

Пример 80

Равносторонний треугольник ABC, сторона которого равна 40 *см*, движется в плоскости xOy так, что его вершины A и B перемещаются по осям Oy и Ox, причем ускорение вершины A равно $w_A = 20\sqrt{3}$ *см/сек²*, а ускорение вершины B равно $w_B = 10$ *см/сек²*. Найти ускорение вершины C в момент, когда сторона AC параллельна оси Ox (рис. 108).

Рис. 108

Решение

1-й способ (аналитический). Так как ускорение $\overline{w}_A$ точки A известно как по модулю, так и по направлению, то выберем точку A за полюс. Тогда, согласно формуле (71), будем иметь:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{(n)} + \overline{w}_{BA}^{(\tau)}, \quad \text{(a)}$$

$$\overline{w}_C = \overline{w}_A + \overline{w}_{CA}^{(n)} + \overline{w}_{CA}^{(\tau)}. \quad \text{(б)}$$

Векторы $\overline{w}_{BA}^{(n)}$ и $\overline{w}_{CA}^{(n)}$ направлены соответственно по BA и CA, а векторы $\overline{w}_{BA}^{(\tau)}$ и $\overline{w}_{CA}^{(\tau)}$ соответственно перпендикулярны к BA и CA. Кроме того,

$$w_{BA}^{(n)} = BA\,\omega^2, \quad w_{BA}^{(\tau)} = BA\,\varepsilon,$$
$$w_{CA}^{(n)} = CA\,\omega^2, \quad w_{CA}^{(\tau)} = CA\,\varepsilon.$$

А так как $AC = AB$, то $w_{CA}^{n} = w_{BA}^{n}$ и $w_{CA}^{\tau} = w_{BA}^{\tau}$.

Чтобы найти w_{BA}^{n} и w_{BA}^{τ}, спроектируем векторное равенство (а) на направление BA и на направление, перпендикулярное к BA:

$$-w_B \cos 60° = -w_A \cos 30° + w_{BA}^{(n)},$$
$$-w_B \cos 30° = w_A \cos 60° - w_{BA}^{(\tau)}.$$

Отсюда

$$w_{BA}^{(n)} = \frac{w_A \cdot \sqrt{3} - w_B}{2} = 25 \ см/сек^2,$$
$$w_{BA}^{(\tau)} = \frac{w_A + w_B \sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \approx 25{,}95 \ см/сек^2.$$

Чтобы найти теперь ускорение точки C, спроектируем векторное равенство (б) на направление AC или, что то же, на ось x и направление, перпендикулярное к AC, т. е. на ось y:

$$w_{Cx} = -w_{CA}^{(n)} = -w_{BA}^{(n)} = -25 \ см/сек^2,$$
$$w_{Cy} = -w_A + w_{CA}^{(\tau)} = -w_A + w_{BA}^{\tau} =$$
$$= -5\sqrt{3} \approx -8{,}65 \ см/сек^2.$$

Отсюда находим:

$$w_c = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = \sqrt{25^2 + 75} = 10\sqrt{7} \approx 26{,}46 \ см/сек^2.$$

2-й способ (геометрический). Выбрав предварительно масштаб ускорений 5 $см/сек^2$ в 1 $см$, построим многоугольники ускорений точек B и C, исходя из векторных равенств (а) и (б). Для этого из произвольной точки O (рис. 109) проводим векторы $\overline{Ob} = \overline{w}_B$ и $\overline{Oa} = \overline{w}_A$.

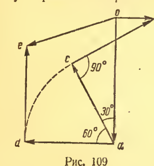


Рис. 109

Далее, из точки a проводим луч, параллельный вектору $\overline{w}_{BA}^{(n)}$, т. е. параллельный направлению BA, а из точки b — луч, параллельный вектору $\overline{w}_{BA}^{(\tau)}$, т. е. перпендикулярный к BA, до их пересечения в точке c.

Тогда

$$\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ac} + \overline{cb},$$

или

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{ac} + \overline{cb};$$

отсюда на основании равенства (а) следует, что $\overline{ac} = \overline{w}_{BA}^{(n)}$ и $\overline{cb} = \overline{w}_{BA}^{(\tau)}$.

Чтобы построить многоугольник ускорений для точки C, проведем из точки a вектор $\overline{ad}$, причем

$$\overline{ad} \parallel CA \quad \text{и} \quad ad = ac = w_{BA}^{(n)};$$

так как

$$w_{CA}^{(n)} = w_{BA}^{(n)},$$

то

$$\overline{ad} = \overline{w}_{CA}^{(n)}.$$

Затем из точки d проводим вектор $\overline{de}$, причем $\overline{de} \perp CA$ и $de = cb = w_{BA}^{(\tau)}$; так как $w_{CA}^{(\tau)} = w_{BA}^{(\tau)}$, то $de = w_{CA}^{(\tau)}$. Построив вектор $\overline{Oe}$, будем иметь:

$$\overline{Oe} = \overline{Oa} + \overline{ad} + \overline{de} = \overline{w}_A + \overline{w}_{CA}^{(n)} + \overline{w}_{CA}^{(\tau)},$$

или, на основании равенства (б), $\overline{Oe} = \overline{w}_C$.

Следовательно, вектор $\overline{Oe}$ определяет искомое ускорение точки C.

Пример 81

В шарнирном четырехзвеннике O_1ABO_2 ведущий кривошип $O_1A = 10\sqrt{3}$ *см* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{сек}$ и при помощи стержня AB приводит в движение кривошип O_2B. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорения точки B, если $AB = 20$ *см*, $\angle AO_1O_2 = \angle O_1AB = 90°$ и $\angle ABO_2 = 60°$ (рис. 110).

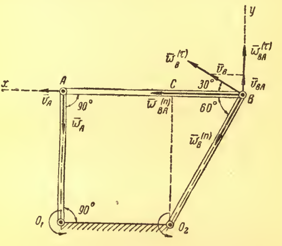


Рис. 110

Решение

1-й способ (аналитический). Данный механизм состоит из трех звеньев:

1) кривошипа O_1A, равномерно вращающегося вокруг оси O_1 с угловой скоростью

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{сек};$$

2) стержня O_2B, вращающегося вокруг оси O_2;

3) стержня AB, движущегося в плоскости рисунка.

Так как движение звена O_1A задано, то можем найти скорость и ускорение точки A. Вектор $\overline{v}_A$ перпендикулярен радиусу O_1A и по модулю равен

$$v_A = \omega_1 \; O_1A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 15 \;\; см/сек.$$

Так как кривошип O_1A вращается равномерно, то вектор $\overline{w}_A$ ускорения точки A направлен вдоль O_1A к центру O_1 и по модулю равен:

$$w_A = \omega_1^2 \cdot O_1A = 10\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \;\; см/сек^2.$$

Далее, рассмотрим точку B.

Так как точка B принадлежит звену O_2B, вращающемуся вокруг неподвижной оси O_2, то скорость $\overline{v}_B$ этой точки перпендикулярна к O_2B и, следовательно, образует с направлением BA угол, равный 30°.

С другой стороны, точка B принадлежит звену AB, движущемуся в плоскости рисунка, принимая в этом движении точку A за полюс, будем иметь:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA},$$

причем вращательная скорость $\overline{v}_{BA}$ точки B вокруг полюса A перпендикулярна к AB. Проектируя это векторное равенство на оси x и y, направленные, как указано на рисунке, получим

$$v_B \cos 30° = v_A \quad \text{и} \quad v_{BA} = v_B \cdot \cos 60°.$$

Отсюда находим:

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30°} = 10\sqrt{3} \; см/сек,$$

$$v_{BA} = \frac{v_B}{2} = 5\sqrt{3} \; см/сек.$$

Ускорение $\overline{w}_B$ точки B слагается из нормального ускорения $\overline{w}_B^{(n)}$, направленного по кривошипу O_2B от B к O_2, и касательного ускорения $\overline{w}_B^{\tau}$, перпендикулярного к O_2B, т. е.

$$\overline{w}_B = \overline{w}_B^{(n)} + \overline{w}_B^{(\tau)}.$$

С другой стороны, поскольку точка B принадлежит звену AB, имеем:

$$\overline{w}_B = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{(n)} + \overline{w}_{BA}^{(\tau)},$$

причем нормальное ускорение $\overline{w}_{BA}^{(n)}$ точки B во вращательном дви-

жении вокруг полюса A направлено по BA, а касательное ускорение $\overline{w}_{BA}^{(\tau)}$ точки B в том же движении направлено перпендикулярно к AB. Таким образом, получим равенство:

$$\overline{w}_B^{(n)} + \overline{w}_B^{(\tau)} = \overline{w}_A + \overline{w}_{BA}^{(n)} + \overline{w}_{BA}^{(\tau)}.$$

Проектируя это векторное равенство на ось x, получаем:

$$w_B^{(n)} \cdot \cos 60^\circ + w_B^{(\tau)} \cdot \cos 30^\circ = w_{BA}^{(n)}. \qquad \text{(a)}$$

Искомое нормальное ускорение точки B равно по модулю

$$w_B^{(n)} = \frac{v_B^2}{O_2B} = \frac{300}{O_2B};$$

длину O_2B находим из треугольника O_2BC:

$$O_2B = \frac{O_2C}{\cos 30^\circ} = \frac{O_1A}{\cos 30^\circ} = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 20 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$w_B^{(n)} = \frac{300}{20} = 15 \text{ см/сек}^2.$$

Если угловую скорость стержня AB вокруг полюса A обозначим ω, то

$$v_{BA} = AB \cdot \omega$$

и

$$w_{BA}^{(n)} = AB \ \omega^2 = \frac{v_{BA}^2}{AB} = \frac{75}{20} = \frac{15}{4} \text{ см/сек}^2.$$

Подставляя эти значения в уравнение (а), получим

$$\frac{15}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} w_B^{(\tau)} = \frac{15}{4}.$$

Отсюда находим:

$$w_B^{\tau} = -\frac{15 \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} = -4{,}3 \text{ см/сек}^2.$$

Итак:

$$v_B = 10\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ см/сек}, \quad w_B^{(n)} = 15 \text{ см/сек}^2,$$
$$w_B^{(\tau)} = -4{,}3 \text{ см/сек}^2.$$

Так как касательное ускорение получилось отрицательным, то это указывает, что вектор $\overline{w}_B^{(\tau)}$ имеет направление, противоположное принятому на рисунке, т. е. он направлен противоположно скорости $\overline{v}_B$; следовательно, вращение кривошипа является замедленным.

2-й способ (графический). Выбрав предварительно масштаб скоростей 5 *см/сек* в 1 *см* и масштаб ускорений 5 *см/сек*² в 1 *см*.

Найдем сначала графически скорость $\bar{v}_B$ точки B и составляющую $\bar{v}_{BA}$ этой скорости, исходя из равенства

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}. \qquad (б)$$

Для этого из произвольной точки O проведем вектор $\overline{Oa} = \bar{v}_A$. Далее из точки a проводим луч, параллельный вектору $\bar{v}_{BA}$, т. е. перпендикулярный к AB, а из точки O — луч, параллельный вектору $\bar{v}_B$, т. е. перпендикулярный O_2B, до их пересечения в точке b.

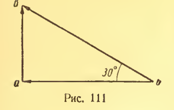


Рис. 111

Тогда $\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$, или $\overline{Ob} = \bar{v}_A + \overline{ab}$.

Отсюда на основании векторного равенства (б) заключаем, что $\overline{ab} = \bar{v}_{BA}$ и $\overline{Ob} = \bar{v}_B$.

Из треугольника Oab, находим:

$$v_B = \frac{v_A}{\cos 30^\circ} = 10\sqrt{3} \ см/сек.$$

$$v_{BA} = v_A \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 5\sqrt{3} \ см/сек \quad \text{(рис. III)}.$$

Далее находим числовые значения $\bar{w}^n_{BA}$ и $\bar{w}^n_B$:

$$w^n_{BA} = \frac{v^2_{BA}}{AB} = 15 \ см/сек^2,$$

$$w^n_B = \frac{v^2_B}{O_2B} = \frac{15}{4} \ см/сек^2.$$

Из равенства

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}^{(n)}_{BA} + \bar{w}^{\tau}_{BA}$$

следует, что вектор $\bar{w}_B$ нужно строить как замыкающую сторону ломаной линии, сторонами которой являются векторы $\bar{w}_A$, $\bar{w}^{(n)}_{BA}$ и $\bar{w}^{(\tau)}_{BA}$. При этом векторы $\bar{w}_A$, $\bar{w}^{(n)}_{BA}$ известны по модулю и направлению, а вектор $\bar{w}^{(\tau)}_{BA}$ — только по направлению $(\bar{w}^{(\tau)}_{BA} \perp \overline{ab})$.

Поэтому из произвольной точки O_1 проведем вектор $\overline{O_1a_1} = \bar{w}_A$. Далее из точки a_1 проводим вектор $\overline{a_1b_1} = \bar{w}^{(n)}_{BA}$ и из точки b_1 — прямую $b_1\beta$, параллельную вектору $\bar{w}^{(\tau)}_{BA}$, т. е. перпендикулярную к a_1b_1.

С другой стороны, $\bar{w}_B = \bar{w}^{(n)}_B + \bar{w}^{(\tau)}_B$, причем вектор $\bar{w}^{(n)}_B$ известен по величине и направлению (он направлен вдоль BO_2), а вектор $\bar{w}^{(\tau)}_B$ известен только по направлению $(\bar{w}^{(\tau)}_B \perp BO_2)$. Следовательно, вектор $\bar{w}_B$ есть замыкающая сторона ломаной линии, отрезками которой являются векторы $\bar{w}^{(n)}_B$ и $\bar{w}^{(\tau)}_B$.

Поэтому из точки O_1 нужно провести вектор $\overline{O_1c_1} = \overline{w}_B^{(n)}$, и из конца c_1 этого вектора восстановить к нему перпендикуляр $c_1\gamma$, который определяет направление вектора $\overline{w}_B^{(\tau)}$. Конец искомого вектора $\overline{w}_B$ находим как точку d_1 пересечения прямых $b_1\beta$ и $c_1\gamma$.
Тогда

$$\overline{b_1d_1} = \overline{w}_{BA}^{(\tau)}, \quad \overline{c_1d_1} = \overline{w}_B^{(\tau)}$$

и

$$\overline{O_1d_1} = \overline{w}_B \quad (\text{рис. } 112).$$

Рассмотрим теперь второй способ определения ускорений точек плоской фигуры — способ, основанный на построении мгновенного центра ускорений.

Если мгновенный центр ускорений Q принять за полюс, то для ускорения произвольно выбранной точки M фигуры будем иметь:

$$\overline{w}_M = \overline{w}_Q + \overline{w}_{MQ},$$

но $w_Q = 0$, а потому

$$\overline{w}_M = \overline{w}_{MQ} = \overline{w}_{MQ}^{(n)} + \overline{w}_{MQ}^{(\tau)}, \tag{74}$$

т. е. ускорение любой точки M плоской фигуры определяется как ускорение во вращательном движении вокруг мгновенного центра ускорений (рис. 113).

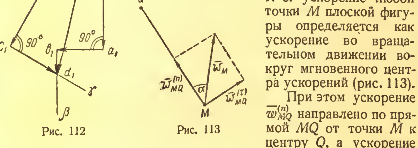


Рис. 112 Рис. 113

При этом ускорение $\overline{w}_{MQ}^{(n)}$ направлено по прямой MQ от точки M к центру Q, а ускорение $\overline{w}_{MQ}^{(\tau)}$ перпендикулярно к MQ и

$$w_{MQ}^{(n)} = QM\ \omega^2, \quad w_{MQ}^{(\tau)} = QM\ \varepsilon. \tag{75}$$

Ускорение $\overline{w}_M$ точки M равно по модулю

$$w_M = QM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{76}$$

и составит с направлением MQ угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{77}$$

Отсюда следует: 1) угол α *для всех точек фигуры* имеет в данный момент *одно и то же значение*; 2) ускорения точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений.

Чтобы определить для данного момента положение мгновенного центра ускорений нужно:

1) найти ускорение $\overline{w}_A$ какой-либо точки A фигуры [обычно при решении задач рассматриваемого типа ускорение одной точки фигуры (механизма) или задается, или его можно легко найти];

2) повернуть полупрямую, по которой направлен вектор $\overline{w}_A$, вокруг точки A на острый угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ или в направлении вращения фигуры, если это вращение является ускоренным, или в противоположном направлении в противном случае;

3) на полученной после этого поворота полупрямой отложить отрезок

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}. \tag{78}$$

Отметим два частных случая:

1) Пусть $\varepsilon = 0$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = 0$ и $\alpha = 0$, следовательно, ускорение $\overline{w}_M$ любой точки M движущейся фигуры направлено по MQ т. е. проходит через центр Q. Поэтому мгновенный центр ускорений Q в этом случае можно найти как точку пересечения прямых, по которым направлены ускорения двух каких-либо точек фигуры

2) Пусть $\omega = 0$, и тогда $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ и $\alpha = 90°$; следовательно, ускорение $\overline{w}_M$ любой точки M фигуры перпендикулярно к MQ. Поэтому мгновенный центр ускорений Q в этом случае можно найти как точку пересечения перпендикуляров восстановленных из двух каких-либо точек движущейся фигуры к ускорениям этих точек.

Пример 82

Кривошип OA длиной 10 *см* вращается равномерно вокруг оси O с угловой скоростью $\omega_0 = 5 \frac{1}{сек}$ и приводит в движение шатун AB длиной 50 *см*. Ползун B движется прямолинейно в горизонтальных направляющих, как указано на рисунке.

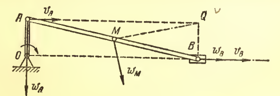


Рис. 114

Найти ускорения точек B и M, если $AM = MB$ и если $\angle AOB = 90°$ (рис. 114).

Решение

Так как скорости $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$ точек A и B шатуна, очевидно, параллельны, то мгновенный центр вращения шатуна (точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из A и B к скоростям $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$) является бесконечно удаленной точкой; отсюда следует, что угловая скорость шатуна в данный момент равна нулю (см. учебник И. М. Воронкова, стр. 299). Поэтому мгновенный центр ускорений шатуна лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к ускорениям $\overline{w}_A$ и $\overline{w}_B$ этих точек. Но ускорение $\overline{w}_B$ направлено по прямой OB, так как точка B движется прямолинейно, а ускорение $\overline{w}_A$ направлено к центру вращения O, так как кривошип OA вращается равномерно. Следовательно, мгновенный центр ускорений Q шатуна есть точка пересечения прямых AQ и BQ, причем $AQ \perp OA$ и $BQ \perp OB$.

Так как ускорения точек шатуна пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра ускорений, то

$$\frac{w_B}{QB}=\frac{w_M}{QM}=\frac{w_A}{QA};$$

отсюда

$$w_B=\frac{QB}{QA}w_A=\frac{OA}{OB}\,w_A \quad \text{и} \quad w_M=\frac{QM}{QA}\,w_A.$$

Так как кривошип OA вращается равномерно, то

$$w_A=OA\ \omega_0^2=10\cdot 25=250\ см/сек^2$$

и

$$OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{50^2-10^2}=10\sqrt{24}=20\sqrt{6}\ см,$$

$$OM=\frac{OQ}{2}=\frac{AB}{2}=25\ см,$$

а потому

$$w_B=\frac{10}{20\sqrt{6}}\cdot 250=\frac{125}{\sqrt{6}}\approx 51{,}02\ см/сек^2,$$

$$w_M=\frac{25\cdot 250}{20\sqrt{6}}=\frac{625}{2\sqrt{6}}\approx 127{,}5\ см/сек^2.$$

Ускорение $\overline{w}_M$ перпендикулярно к MQ.

ГЛАВА IV

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

§ 1. Уравнения движения и траектория составного движения точки

Если мы рассматриваем движение точки по отношению к системе координат $O_1x_1y_1z_1$, которая, в свою очередь, движется относительно системы отсчета $Oxyz$, принимаемой за неподвиж-

ную, то движение точки M по отношению к подвижным осям $O_1x_1y_1z_1$ называется *относительным.* Движение подвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *переносным*, а движение точки M относительно неподвижных осей называется в этом случае составным, или абсолютным движением. В связи с этим различают абсолютную ($\overline{v}_a$), относительную ($\overline{v}_r$) и переносную ($\overline{v}_e$) скорости точки M, а также абсолютное ($\overline{w}_a$), относительное ($\overline{w}_r$) и переносное ($\overline{w}_e$) ускорения этой точки. При этом относительной скоростью и относительным ускорением точки называют ее скорость и ускорение в относительном движении; абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки называют ее скорость и ускорение в абсолютном движении. Переносной скоростью и переносным ускорением точки называются соответственно скорость и ускорение той точки, неизменно связанной с подвижной системой осей, с которой в данный момент совпадает точка M.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разбить на два основных типа:

1) зная относительное движение точки и переносное движение, найти уравнения и траекторию абсолютного движения этой точки (задачи 417, 419—422);

2) зная абсолютное движение точки и переносное движение, найти уравнения и траекторию относительного движения точки (задачи 418, 423, 425).

При решении этих задач следует прежде всего установить подвижную и неподвижную системы отсчета и выяснить характер переносного движения, т. е. характер движения того тела, с которым неизменно связана выбранная подвижная система осей. После этого следует установить, какое движение рассматриваемой точки является абсолютным движением и какое — относительным.

Пример 83

Стержень $OA = l$ вращается вокруг оси O в плоскости рисунка по закону $\varphi = bt$; по стержню движется точка M по закону $OM = at$.

Найти траекторию абсолютного движения точки M (рис. 115).

Решение

Выберем подвижную систему осей, неизменно связанную со стержнем OA; тогда переносное движение, т. е. движение этих подвижных осей, будет вращательным вокруг оси O, а движение точки M вдоль стержня будет относительным движением этой точки. (Неподвижные оси координат Ox и Oy показаны на рисунке). Тогда уравнение прямолинейного относительного движения M будет:

$$x_1 = OM = at. \qquad \text{(a)}$$

Уравнение переносного вращательного движения запишется так:

$$\varphi = bt. \tag{б}$$

Уравнения абсолютного движения точки M в полярных координатах ($r = OM$, φ) будут, очевидно, таковы:

$$r = at,$$
$$\varphi = bt.$$

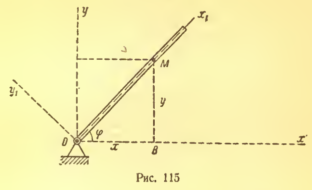


Рис. 115

Исключив отсюда время t, найдем уравнение траектории абсолютного движения точки M в полярных координатах:

$$r = \frac{a}{b}\varphi.$$

Эта траектория есть архимедова спираль (рис. 116).

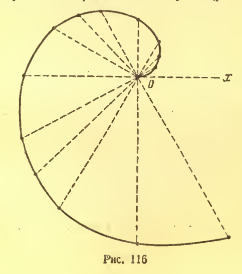


Рис. 116

Чтобы найти уравнения абсолютного движения точки M в декартовых координатах, нужно ее координаты x и y в неподвижной системе отсчета Oxy, выразить в функциях времени t:

$$x = OB = OM \cos\varphi,$$
$$y = BM = OM \sin\varphi,$$

или, подставляя значения φ и OM из уравнений (а) и (б),

$$\left.\begin{aligned} x &= at\cos bt, \\ y &= at\sin bt. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Чтобы исключить отсюда время t, разделим второе из этих уравнений на первое:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} bt,$$

откуда

$$t = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Кроме того, возведя уравнения (в) в квадрат и сложив их, получаем

$$x^2 + y^2 = a^2t^2$$

или

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}.$$

Таково уравнение абсолютной траектории точки M в декартовых координатах.

Пример 84

Резец совершает прямолинейное возвратно-поступательное движение так, что его конец M движется по неподвижной оси Ox по закону $x = OM = a\sin\omega t$. Составить уравнение движения точки M относительно диска, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω вокруг точки O, и найти траекторию этого относительного движения (рис. 117).

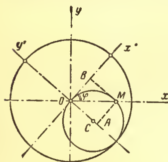


Рис. 117

Решение

Подвижную систему координатных осей Ox_1y_1, неизменно связанных с диском, выберем так, чтобы в начальный момент ось Ox_1 совпадала с неподвижной осью Ox.

Тогда уравнение переносного вращательного движения запишется так:

$$\varphi = \omega t.$$

Чтобы получить уравнения относительного движения точки M, находим ее координаты в подвижной системе отсчета Ox_1y_1:

$$x_1 = OB = OM \cos\varphi,$$
$$y_1 = -OA = -OM \sin\varphi.$$

Подставив сюда значения φ и OM, получим:

$$x_1 = a \sin\omega t \cos\omega t = \frac{a \sin 2\omega t}{2},$$
$$y_1 = -a \sin\omega t \sin\omega t = -a \sin^2\omega t.$$

Это и есть уравнения относительного движения точки M.

Чтобы найти траекторию относительного движения этой точки, достаточно из последних двух уравнений исключить время t.

Для этого возведем первое из этих уравнений в квадрат:

$$x_1^2 = a^2 \sin^2\omega t \cos^2\omega t = a^2 \sin^2\omega t\,(1 - \sin^2\omega t).$$

Заменяя $a \sin^2\omega t$ через y_1, получим:

$$x_1^2 = -y_1(a + y_1)$$

или

$$y_1^2 = -ay_1 - x_1^2,$$

или

$$x_1^2 + ay_1 + y_1^2 = 0,$$

или

$$x_1^2 + \left(y_1 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, искомая траектория есть окружность радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $\left(0,\ -\frac{a}{2}\right)$.

§ 2. Теорема сложения скоростей

Если мы изучаем движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета, то имеет место следующая теорема: абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этой точки (рис. 118), т. е.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \qquad (79)$$

Рис. 118

Если угол между векторами $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$ обозначим α, то модуль и направление вектора абсолютной скорости определяются по формулам (80) и (81)

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\alpha} \qquad (80)$$

и

$$\frac{v_a}{\sin\alpha} = \frac{v_e}{\sin\beta} = \frac{v_r}{\sin\gamma}, \tag{81}$$

где β и γ — углы, образуемые вектором $\bar{v}_a$ с векторами $\bar{v}_r$ и $\bar{v}_e$.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на четыре основных типа:

ЗАДАЧИ ТИПА I

(задачи 435, 439, 444)

Зная переносную и относительную скорости точки, найти ее абсолютную скорость;

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по двум смежным его сторонам $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$.

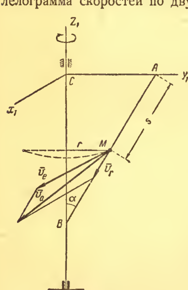


Рис. 119

Пример 85

Прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью

$$\omega = 2\frac{1}{сек}.$$

По гипотенузе AB движется точка M по закону $s = AM = 20t^2$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах).

Определить абсолютную скорость точки M в момент, когда она находится в середине гипотенузы AB, если $AB = 40$ *см* и $\alpha = 30°$ (рис. 119)

Решение

Выберем подвижную систему координатных осей $Cx_1y_1z_1$, неизменно связанных с треугольником ABC, которые будут вращаться вместе с этим треугольником; следовательно, переносное движение будет вращательным вокруг оси z_1 с угловой скоростью $\omega = 2\frac{1}{сек}$. Поэтому переносная скорость точки M будет направлена перпендикулярно к плоскости треугольника ABC и равна по модулю $r\cdot\omega$, где r — расстояние от точки M до оси вращения, равное

$$(AB - s)\sin\alpha = \frac{1}{2}(40 - 20t^2) = 10(2 - t^2).$$

Так как относительно треугольника ABC точка M перемещается вдоль гипотенузы AB, то относительное движение этой точки является прямолинейным движением, совершающимся по закону $s = 20t^2$; поэтому вектор относительной скорости точки M направлен вдоль прямой AB и по модулю равен:

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 40t.$$

На основании теоремы о сложении скоростей найдем, что вектор абсолютной скорости $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Так как вектор относительной скорости $\bar{v}_r$ лежит в плоскости Cy_1z_1, а вектор переносной скорости $\bar{v}_e$ перпендикулярен к этой плоскости, то $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$; поэтому

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{(40t)^2 + 100(2 - t^2)^2\omega^2},$$

или

$$v_a = \sqrt{40^2t^2 + (2 - t^2)^2 \cdot 400} = 20\sqrt{4t^2 + (2 - t^2)^2} = 20\sqrt{4 + t^4}.$$

Когда точка M достигает середины AB, расстояние $s = AM = 20t^2 = 20$ *см*, и, следовательно, это происходит в момент $t = 1$ *сек*. В этот момент

$$v_a = 20\sqrt{4 + t^4} = 20\sqrt{5} = 44{,}7 \text{ см/сек}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

(задачи 433, 441 — 443)

Зная абсолютную скорость точки и направления переносной и относительной скоростей этой точки, найти модули этих скоростей.

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по данной диагонали и направлениям двух смежных его сторон.

Пример 86

Механизм состоит из двух параллельных валов O и O_1, кривошипа OA и кулисы O_1B; конец A кривошипа перемещается вдоль прорези в кулисе O_1B; расстояние между осями валов равно $OO_1 = 30$ *см*, длина кривошипа OA равна 10 *см*. Кривошип вращается равномерно вокруг оси O с угловой скоростью $\omega = 4\,\frac{1}{сек}$. Найти переносную и относительную скорости точ-

ки A, а также угловую скорость ω_1 кулисы в момент, когда кривошип OA составляет с вертикалью угол $\varphi = 60°$(рис. 120)

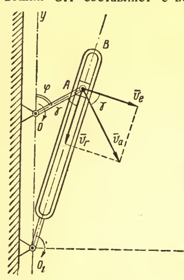


Рис. 120

Решение

Если за подвижную систему отсчета выберем систему, неизменно связанную с кулисой O_1B, то переносное движение будет вращательным вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1. Поэтому переносная скорость точки A будет перпендикулярна к O_1A и по модулю равна $v_e = O_1A\omega_1$. Относительное движение точки A, т. е. ее перемещение относительно кулисы, является прямолинейным вдоль O_1B. Поэтому вектор относительной скорости $\bar{v}_r$ этой точки направлен по прямой O_1B. Но точка A принадлежит одновременно и кривошипу OA, вращающемуся вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega = 4 \frac{1}{сек}$, а потому траекторией абсолютного движения точки A, т. е. ее движения по отношению к неподвижной системе координат O_1xy, является окружность радиуса OA.

Абсолютная скорость точки A направлена перпендикулярно к OA и по модулю равна:

$$v_a = \omega \, OA = 4 \cdot 10 = 40 \ см/сек.$$

Зная модуль и направление вектора $\bar{v}_a$ и направления векторов $\bar{v}_e$ и $\bar{v}_r$, строим параллелограмм скоростей, в котором вектор $\bar{v}_a$ должен быть диагональю. Так как $\bar{v}_r \perp \bar{v}_e$, то из прямоугольного треугольника имеем:

$$v_r = v_a \sin\gamma, \ v_e = v_a \cdot \cos\gamma,$$

где γ — угол между векторами $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_e$, равный углу OAO_1. Для определения этого угла из треугольника OO_1A находим:

$$O_1A = \sqrt{O_1O^2 + OA^2 - 2O_1O \cdot OA \cdot \cos(180° - \varphi)} =$$
$$= \sqrt{30^2 + 10^2 + 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot \cos 60°} = 10\sqrt{13},$$
$$\frac{O_1O}{\sin\gamma} = \frac{O_1A}{\sin(180° - \varphi)} = \frac{O_1A}{\sin\varphi}.$$

Отсюда

$$\sin\gamma = \frac{O_1O}{O_1A}\sin\varphi = \frac{30}{10\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

и

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{27}{52}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

Следовательно,

$$v_r = 40\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = 60\frac{\sqrt{39}}{13} = 24{,}27\ \text{см/сек}.$$

$$v_e = 40\cdot\frac{5}{2\sqrt{13}} = \frac{100\sqrt{13}}{13} = 27{,}73\ \text{см/сек}.$$

Из равенства $v_e = \omega_1\cdot O_1A$ находим:

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{100\sqrt{13}}{13\cdot 10\cdot\sqrt{13}} = \frac{10}{13} = 0{,}77\frac{1}{\text{сек}}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

(задачи 436, 437, 440)

Зная векторы $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_e$ (или векторы $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_r$), найти модуль и направление вектора $\bar{v}_r$ (или вектора $\bar{v}_e$);

Решение задач этого типа сводится к построению параллелограмма скоростей по данной диагонали, одной из его сторон и углу между ними.

Пример 87

Полуцилиндр радиусом $r = 10$ *см* движется поступательно и прямолинейно по неподвижной горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 30$ *см/сек* и толкает опирающийся на него стержень CD, который перемещается в вертикальных направляющих.

Найти скорость точки C стержня относительно полуцилиндра и расстояние CE от этой точки до диаметра AB в момент, когда скорость стержня CD будет $v_2 = 40$ *см/сек* (рис. 121).

Решение

Переносным движением здесь является поступательное движение полуцилиндра со скоростью $\bar{v}_1$; поэтому переносная скорость точки C будет направлена по горизонтали и по модулю равна $v_e = v_1 = 30$ *см/сек*. Так как абсолютное движение стержня CD есть поступательное движение в вертикальном направлении со скоростью $\bar{v}_2$, то абсолютная скорость точки C направлена по вертикали и по модулю будет $v_a = v_2 = 40$ *см/сек*.

Чтобы найти вектор относительной скорости $\bar{v}_r$, нужно построить в точке C векторы $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_e$ и, соединив их концы, дополнить полученный треугольник до параллелограмма, в котором вектор $\bar{v}_a$ должен быть диагональю.

Так как в относительном движении точка C движется по полуокружности радиусом r, то вектор $\bar{v}_r$ должен быть направлен по касательной к этой полуокружности.

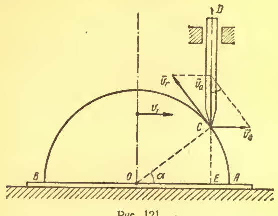


Рис. 121

Поэтому угол между векторами $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_r$ равен углу AOC, который обозначим α. Теперь из прямоугольного треугольника находим:

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \ \text{см/сек}.$$

и

$$\sin\alpha = \frac{v_e}{v_r} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$CE = OC \sin\alpha = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \ \text{см}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА IV

(задачи 430, 434, 438)

Зная вектор $\bar{v}_e$ (или вектор $\bar{v}_r$) и направления скоростей $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_r$ (или $\bar{v}_a$ и $\bar{v}_e$), найти модули этих скоростей.

При решении задач типа IV параллелограмм скоростей следует строить по заданной его стороне $\bar{v}_e$ (или $\bar{v}_r$) и известным направлениям другой его стороны $\bar{v}_r$ (или $\bar{v}_e$) и диагонали $\bar{v}_a$.

Решение задач этого типа аналогично решению задач типа II.

§ 3. Теорема сложения ускорений при переносном поступательном движении

В случае составного движения точки, если переносное движение является поступательным, то абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме ее переносного и относительного ускорений (рис. 122), т. е.

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r, \qquad (82)$$

или

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e^{(\tau)} + \overline{w}_e^{(n)} + \overline{w}_r^{(\tau)} + \overline{w}_r^{(n)}, \qquad (83)$$

где $\overline{w}_e^{(\tau)}$ и $\overline{w}_e^{(n)}$ — касательная и нормальная составляющие переносного ускорения точки, а $\overline{w}_r^{(\tau)}$ и $\overline{w}_r^{(n)}$ — касательная и нормальная составляющие ее относительного ускорения (рис. 122).

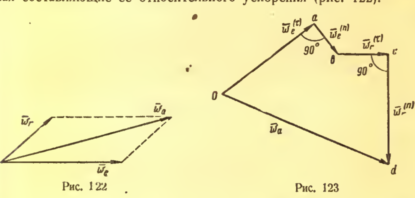


Рис. 122

Рис. 123

Если переносное или относительное движение является прямолинейным, то соответствующее нормальное ускорение ($w_e^{(n)}$ или $w_r^{(n)}$) будет равно нулю; при криволинейном равномерном переносном или относительном движении обращается в нуль соответствующее касательное ускорение ($w_e^{(\tau)}$ или $w_r^{(\tau)}$).

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно решить двумя способами: геометрическим или аналитическим.

Геометрическое решение задачи состоит в построении параллелограмма или многоугольника ускорений на основании векторных равенств (82) или (83).

При аналитическом решении задачи применяется метод проекций, т. е. искомое ускорение определяется по его проекциям на выбранные координатные оси. При этом следует иметь в виду, что проекция абсолютного ускорения на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих ускорений на ту же ось; проектируя, например, векторные равенства (82) или (83) на ось x, будем иметь:

$$w_{ax} = w_{ex} + w_{rx}, \qquad (84)$$

или

$$w_{ax} = w_{ex}^{(\tau)} + w_{ex}^{(n)} + w_{rx}^{(\tau)} + w_{rx}^{(n)}. \qquad (85)$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу (в основном задачи из сборника И. В. Мещерского), можно разделить на следующие три основных типа:

ЗАДАЧИ ТИПА I

(задачи 447—450, 455, 457—459)

1. Заданы переносное и относительное ускорение точки, т. е. векторы $\overline{w}_e$ и $\overline{w}_r$, или эти ускорения можно непосредственно найти из условий задач, характеризующих относительное и переносное движения.

Определить абсолютное ускорение $\overline{w}_a$ этой точки.

Пример 88

Кривошип $O_1A = 0{,}5$ *м* шарнирного параллелограмма O_1ABO_2 вращается вокруг неподвижной оси O_1 с угловой скоростью $\omega_1 = 2t \frac{1}{сек}$.

Вдоль стороны AB этого параллелограмма перемещается ползун M, по закону $AM = s = 5t^2$ (s выражено в метрах, t — в се-

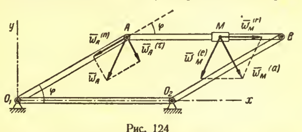


Рис. 124

кундах). Определить абсолютное ускорение ползуна M в момент времени $t = 2$ *сек*, если угол φ в этот момент равен 30° (рис. 124).

Решение

Аналитический способ. Движение ползуна M будем рассматривать как составное, состоящее из двух движений: 1) относительного движения, т. е. движения по отношению к стержню AB, и 2) переносного движения вместе с этим стержнем. Так как при движении стержень AB остается параллельным неподвижному звену O_1O_2, то движение этого стержня является поступательным. Следовательно переносное ускорение точки M равно ускорению точки A, т. е.

$$\overline{w}_M^{(e)} = \overline{w}_A = \overline{w}_A^{(\tau)} + \overline{w}_A^{(n)}.$$

Но точка A принадлежит кривошипу O_1A, а потому

$$w_A^{(n)} = \omega_1^2 \cdot O_1A = 4t^2 \cdot 0{,}5 = 2t^2 = 8 \ м/сек^2,$$

$$w_A^{(\tau)} = \varepsilon_1 \cdot O_1A = \frac{d\omega_1}{dt} \ O_1A = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \ м/сек^2.$$

При этом вектор $\overline{w}_A^{(\tau)}$ направлен перпендикулярно к O_1A, а вектор $\overline{w}_A^{(n)}$ направлен вдоль AO_1 к центру O_1. Так как в относительном движении ползун перемещается вдоль стержня AB по закону $s = 5t^2$, то его относительное ускорение $w_M^{(r)}$ направлено вдоль этого стержня, причем

$$w_M^{(r)} = \frac{d^2s}{dt^2} = 10 \ м/сек^2.$$

Абсолютное ускорение $\overline{w}_M^{(a)}$ точки M определяется по теореме сложения ускорений при переносном поступательном движении:

$$\overline{w}_M^{(a)} = \overline{w}_M^{(e)} + \overline{w}_M^{(r)} = \overline{w}_A^{(\tau)} + \overline{w}_A^{(n)} + \overline{w}_M^{(r)}.$$

Проектируя это равенство на координатные оси x и y, получаем:

$$w_{Mx}^{(a)} = w_{Mx}^{(r)} + w_{Ax}^{(\tau)} + w_{Ax}^{(n)} = w_M^{(r)} + w_A^{(\tau)} \cdot \sin\varphi -$$

$$- w_A^{(n)} \cos\varphi = 10 + 1 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10{,}5 - 4\sqrt{3} =$$

$$= 3{,}58 \ м/сек^2.$$

$$w_{My}^{(a)} = w_{My}^{(r)} + w_{Ay}^{(\tau)} + w_{Ay}^{(n)} = -w_A^{(\tau)} \cdot \cos\varphi - w_A^{(n)} \cdot \sin\varphi =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - 4.$$

Отсюда

$$w_M^{(a)} = \sqrt{\left(10{,}5 - 4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{175 - 80\sqrt{3}} \approx 6{,}1 \ \frac{м}{сек^2}.$$

Если угол между ускорением $w_M^{(a)}$ и осью x обозначим α, то

$$\cos\alpha = \frac{w_{Mx}^{(a)}}{w_M^{(a)}} = \frac{3{,}58}{6{,}1} = 0{,}586,$$

откуда

$$\alpha = 54°6'.$$

Решим теперь эту задачу *геометрическим способом* (рис. 125). Для этого из произвольной точки O проводим вектор $\overline{Oa} = \overline{w}_A^{(n)}$,

причем длина этого вектора равна восьми единицам выбранного масштаба ускорений; затем из точки a проводим вектор $\overline{ab} = \overline{w}_A^{(\tau)}$, длина которого равна единице масштаба ускорений.

Далее, из точки b проводим вектор $\overline{bc} = \overline{w}_M^{(r)}$, причем $bc = 10$ единицам масштаба. Вектор $\overline{Oc}$, замыкающий ломаную линию $Oabc$, определит по модулю и направлению искомое абсолютное ускорение точки M, т. е. $\overline{w}_M^{(a)} = \overline{Oc}$.

Пример 89

(Относительное движение точки — криволинейное).

Круглый диск радиусом r, движущийся в вертикальной

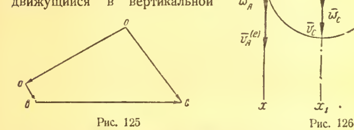


Рис. 125

Рис. 126

плоскости, обмотан нерастяжимой нитью, конец O которой закреплен неподвижно. Падая и вращаясь вокруг своего центра C, диск разматывает нить, причем центр диска C движется по вертикали вниз без начальной скорости с постоянным ускорением $w_e = \frac{2}{3}g$.

Найти ускорения точек M и A диска в момент, когда центр диска опустится на расстояние $h = 6r$ (рис. 126).

Решение

Аналитический способ. Проведем через центр C диска координатные оси Cx_1y_1 *постоянного направления*. Тогда переносное движение, т. е. движение подвижной системы осей Cx_1y_1 будет поступательным; поэтому переносные скорости и переносные ускорения всех точек диска будут равны соответственно скорости и ускорению точки C, и, следовательно,

$$\overline{v}_M^{(e)} = \overline{v}_A^{(e)} = \overline{v}_C \quad \text{и} \quad \overline{w}_M^{(e)} = \overline{w}_A^{(e)} = \overline{w}_C.$$

Относительное движение диска будет вращательным вокруг центра C. Поэтому относительные скорости точек M и A направлены по касательным к диску (по часовой стрелке) и по модулю равны между собой, т. е.

$$v_M^{(r)} = v_A^{(r)}.$$

Относительные ускорения тех же точек равны

$$\overline{w}_M^{(r)} = \overline{w}_M^{(r\tau)} + \overline{w}_M^{(rn)} \text{ и } \overline{w}_A^{(r)} = \overline{w}_A^{(r\tau)} + \overline{w}_A^{(rn)}.$$

Касательные ускорения $\overline{w}_M^{(r\tau)}$ и $\overline{w}_A^{(r\tau)}$ направлены по касательным к диску, причем

$$w_M^{(r\tau)} = \frac{dv_M^{(r)}}{dt} = \frac{dv_A^{(r)}}{dt} = w_A^{(r\tau)};$$

нормальные ускорения $\overline{w}_M^{(rn)}$ и $\overline{w}_A^{(rn)}$ направлены соответственно по радиусам MC и AC к центру C, причем

$$w_M^{(rn)} = \frac{\left(v_M^{(r)}\right)^2}{r} = \frac{\left(v_A^{(r)}\right)^2}{r} = w_A^{(rn)}.$$

Абсолютная скорость точки A равна, очевидно, нулю, так как конец O нити закреплен неподвижно.

Поэтому относительная и переносная скорости $\overline{v}_A^{(r)}$ и $\overline{v}_A^{(e)}$ этой точки, направленные по одной прямой в противоположные стороны, должны быть по модулю равны, т. е.

$$v_A^{(r)} = v_A^{(e)} = v_C.$$

Следовательно,

$$w_M^{(r\tau)} = w_A^{(r\tau)} = \frac{dv_C}{dt} = w_C = \frac{2}{3}g$$

и

$$w_M^{(rn)} = w_A^{(rn)} = \frac{v_C^2}{r}.$$

Так как точка C движется равноускоренно без начальной скорости, то

$$v_C^2 = 2w_C \cdot h = 2 \cdot \frac{2}{3} g \cdot 6r = 8gr,$$

поэтому

$$w_M^{(rn)} = w_A^{(rn)} = 8g.$$

Определив переносное и относительное ускорения точек A и M, находим их абсолютные ускорения по формуле (83)

$$\overline{w}_A^{(a)} = \overline{w}_A^{(e)} + \overline{w}_A^{(r\tau)} + \overline{w}_A^{(rn)}$$

и

$$\overline{w}_M^{(a)} = \overline{w}_M^{(e)} + \overline{w}_M^{(r\tau)} + \overline{w}_M^{(rn)}.$$

Так как векторы $\overline{w}_A^{(e)}$ и $\overline{w}_A^{(r\tau)}$ равны по модулю и противоположны по направлению, то

$$\overline{w}_A^{(e)} + \overline{w}_A^{(r\tau)} = 0$$

и, следовательно, $\overline{w}_A^{(a)} = \overline{w}_A^{(rn)}$, т. е. абсолютное ускорение точки A направлено по радиусу AC и по модулю равно $8g$.

Для проекций вектора $\overline{w}_M^{(a)}$ на оси x и y имеем:

$$w_{Mx}^{(a)} = w_{Mx}^{(e)} + w_{Mx}^{(r\tau)} + w_{Mx}^{(rn)} = w_M^{(e)} + w_M^{(rn)} = \frac{2}{3} g + $$
$$+ 8g = \frac{26}{3} g,$$
$$w_{My}^{(a)} = w_{My}^{(e)} + w_{My}^{(rn)} + w_{My}^{(r\tau)} = w_M^{(r\tau)} = \frac{2}{3} g.$$

Отсюда находим:

$$w_M^{(a)} = \sqrt{\left(\frac{26}{3} g\right)^2 + \left(\frac{2}{3} g\right)^2} = \frac{2}{3} g \sqrt{13^2 + 1} =$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{170}\, g = 8{,}69 g.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Заданы векторы $\overline{w}_a$ и $\overline{w}_e$ (или $\overline{w}_r$), либо эти векторы можно непосредственно найти из условий задачи, характеризующих абсолютное и переносное (или относительное) движения. Определить модуль и направление вектора $\overline{w}_r$ (или $\overline{w}_e$).

Пример 90

Определить модуль и направление относительного ускорения точки C в примере 87, при условии, что полуцилиндр движется с ускорением $\overline{w}_1$, а стержень CD — с ускорением $\overline{w}_2$ (рис. 127).

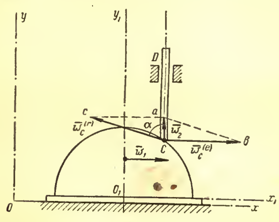


Рис. 127

Решение

Как уже было указано в примере 87, переносное движение здесь является поступательным; поэтому переносное ускорение точки C стержня равно ускорению полуцилиндра, т. е. $\overline{w}_C^{(e)} = \overline{w}_1$.

Абсолютное ускорение точки C равно, очевидно, заданному ускорению поступательного движения стержня, т. е.

$$\overline{w}_C^{(a)} = \overline{w}_2.$$

Для определения относительного ускорения $\overline{w}_C^{(r)}$ точки C достаточно построить параллелограмм ускорений.

Для этого соединим концы a и b векторов $\overline{w}_2$ и $\overline{w}_C^{(e)}$ и дополним полученный треугольник до параллелограмма, так, чтобы вектор $\overline{w}_2$ являлся в этом параллелограмме диагональю; тогда вектор $\overline{Cc}$ определяет искомое относительное ускорение точки C, т. е. $\overline{w}_C^{(r)} = \overline{Cc}$.

Теперь из прямоугольного треугольника получаем:

$$\overline{w}_C^{(r)} = \sqrt{w_2^2 + (w_C^{(e)})^2} = \sqrt{w_2^2 + w_1^2}.$$

Для определения направления вектора $\overline{w}_C^{(r)}$ из того же треугольника находим угол α, который этот вектор образует с вертикалью:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_C^{(e)}}{w_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА III
(задачи 445, 446)

Известны абсолютное ускорение $\overline{w}_a$ и направления всех составляющих ускорений $\overline{w}_e^{(\tau)}$, $\overline{w}_e^{(n)}$, $\overline{w}_r^{(\tau)}$, $\overline{w}_r^{(n)}$, а также модули двух из них. Найти модули двух других составляющих ускорений.

Пример 91

Кривошип $OC = r$ вращается вокруг неподвижной оси O с данной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Соединенный с ним при помощи шарнира ползун C может перемещаться вдоль стороны AB шарнирного параллелограмма O_1ABO_2 с неподвижным звеном O_1O_2. Углы α и β для данного положения механизма известны. Определить относительное ускорение ползуна C и угловое ускорение кривошипа O_1A, длина которого равна a (рис. 128).

Решение

Движение ползуна C будем рассматривать как составное, слагающееся из двух движений: 1) относительного движения по отношению к стержню AB и 2) переносного движения вместе с этим стержнем. Так как при движении стержень AB остается параллельным неподвижному звену O_1O_2, то движение этого стержня, а следовательно, и переносное движение, будет поступательным.

Поэтому переносная скорость и переносное ускорение точки C равны соответственно скорости и ускорению точки A, т. е.

$$\overline{v}_C^{(e)} = \overline{v}_A \text{ и } \overline{w}_C^{(e)} = \overline{w}_A = \overline{w}_A^{(\tau)} + \overline{w}_A^{(n)};$$

векторы $\overline{v}_A$ и $\overline{w}_A^{(\tau)}$ направлены перпендикулярно к кривошипу O_1A, а вектор $\overline{w}_A^{(n)}$ — вдоль O_1A к центру O_1, причем

$$v_A = a\omega_1,\ w_A^{(n)} = a\omega_1^2,\ w_A^{(\tau)} = a \cdot \varepsilon_1,$$

где ω_1 и ε_1 — угловая скорость и угловое ускорение стержня O_1A.

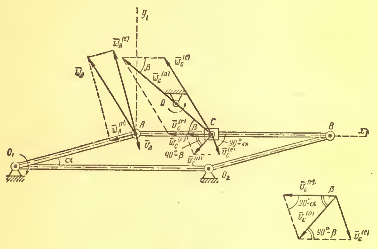


Рис. 128

Так как относительное движение точки C есть прямолинейное движение вдоль стержня AB, то относительная скорость $\overline{v}_C^{(r)}$ и относительное ускорение $\overline{w}_C^{(r)}$ этой точки направлены вдоль стержня AB.

Но точка C принадлежит одновременно и кривошипу OC, вращающемуся равномерно вокрус оси O, поэтому абсолютная скорость $\overline{v}_C^{(a)}$ и абсолютное ускорение $\overline{w}_C^{(a)}$ точки C направлены соответственно по перпендикуляру к OC и вдоль OC к центру O, причем

$$v_C^{(a)} = r\omega,\ w_C^{(a)} = r\omega^2.$$

Зная модуль и направление вектора $v_C^{(a)}$ и направления векторов $\overline{v}_C^{(r)}$ и $\overline{v}_C^{(e)}$, строим параллелограмм скоростей и по теореме синусов из него находим:

$$\frac{v_C^{(a)}}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{v_C^{(e)}}{\sin(90° - \beta)};$$

отсюда

$$v_C^{(e)} = v_C^{(a)} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{r\omega\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Но

$$v_C^{(e)} = v_A = a\omega_1,$$

поэтому

$$\omega_1 = \frac{r\cos\beta}{a\cos\alpha}\omega$$

и, следовательно,

$$w_A^{(n)} = a\omega_1^2 = \frac{r^2\omega^2}{a}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}.$$

По теореме сложения ускорений имеем:

$$\overline{w}_C^{(a)} = \overline{w}_C^{(r)} + \overline{w}_C^{(e)} = \overline{w}_C^{(r)} + \overline{w}_A^{(\tau)} + \overline{w}_A^{(n)}. \quad \text{(a)}$$

В этом векторном равенстве известны теперь направления всех векторов и модули двух из них: $\overline{w}_C^{(a)}$ и $\overline{w}_A^{(n)}$; остается найти модули векторов $\overline{w}_C^{(r)}$ и $\overline{w}_C^{(e\tau)}$. Для этого спроектируем равенство (a) на оси Ax_1 и Ay_1; тогда будем иметь:

$$w_C^{(a)}\cos\beta = w_C^{(r)} + w_A^{(\tau)}\sin\alpha + w_A^{(n)}\cos\alpha,$$
$$w_C^{(a)}\sin\beta = w_A^{(\tau)}\cos\alpha - w_A^{(n)}\sin\alpha.$$

Из этих уравнений находим:

$$w_A^{(\tau)} = \frac{1}{\cos\alpha}(w_C^{(a)}\sin\beta + w_A^{(n)}\sin\alpha) = \frac{r\omega^2}{\cos\alpha}\times$$
$$\times\left(\sin\beta + \frac{r}{a}\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha}\sin\alpha\right) = \frac{r\omega^2}{a\cos^3\alpha}(a\sin\beta\cos^2\alpha + r\sin\alpha\cos^2\beta),$$

$$w_C^{(r)} = w_C^{(a)}\cos\beta - w_A^{(\tau)}\sin\alpha - w_A^{(n)}\cos\alpha = w_C^{(a)}\cos\beta -$$
$$-\frac{\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot w_C^{(a)} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}w_A^{(n)} - w_A^{(n)}\cos\alpha =$$
$$= \frac{r\omega^2}{a\cos^3\alpha}[a\cos(\alpha+\beta)\cos^2\alpha - r\cos^2\beta].$$

Рис. 129

Угловое ускорение ε_1 звена O_1A находим по формуле:

$$\varepsilon_1 = \frac{w_A^{(\tau)}}{O_1A} = \frac{r\omega^2}{a^2\cos^3\alpha}(a\sin\beta\cos^2\alpha + r\sin\alpha\cos^2\beta).$$

Рассмотрим теперь геометрический способ решения этой задачи (рис. 129).

Из произвольной точки O строим в выбранном масштабе векторы $\overline{Oa} = \overline{w}_C^{(a)}$ и $\overline{Ob} = \overline{w}_A^{(n)}$. Затем из точек a и b проводим пря-

мые, параллельные соответственно векторам $\overline{w}_C^{(r)}$ и $\overline{w}_C^{(\tau)}$, до их пересечения в точке c. Тогда

$$\overline{w}_A^{(\tau)}=\overline{bc},\ \overline{w}_C^{(r)}=\overline{ca}\ \text{ и }\ \varepsilon=\frac{bc}{O_1A}.$$

§ 4. Теорема сложения ускорений при переносном вращательном движении

В случае составного движения точки, если переносное движение является вращательным, то обсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова, или добавочного, ускорений этой точки, т. е.

$$\overline{w}_a=\overline{w}_e+\overline{w}_r+\overline{w}_k \tag{86}$$

или

$$\overline{w}_a=\overline{w}_e^{(\tau)}+\overline{w}_e^{(n)}+\overline{w}_r^{(\tau)}+\overline{w}_r^{(n)}+\overline{w}_\kappa. \tag{87}$$

Кориолисово ускорение $\overline{w}_\kappa$ равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки, т. е.

$$\overline{w}_\kappa=2\overline{\omega}_e\times\overline{v}_r. \tag{88}$$

Следовательно, модуль этого ускорения будет равен:

$$w_\kappa=2\omega_e v_r\sin\alpha, \tag{89}$$

где α — угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$.

Чтобы найти направление кориолисова ускорения $\overline{w}_\kappa$ движущейся точки M, достаточно в точке M построить векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$ и восстановить из этой точки перпендикуляр к плоскости, в которой лежат эти векторы $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$. Вектор $\overline{w}_\kappa$ направлен по этому перпендикуляру в ту сторону, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца этого вектора, видел поворот вектора $\overline{\omega}_e$ на угол α против часовой стрелки до совмещения его с вектором $\overline{v}_r$ (рис. 129).

Направление вектора $\overline{w}_\kappa$ можно определить и другим способом.

Проведем через точку M плоскость π, перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_e$ и спроектируем относительную скорость $\overline{v}_r$ на эту плоскость. Если полученную проекцию $\overline{v}_r'$ повернем в плоскости π на 90° вокруг точки M в направлении переносного вращения (рис. 130), то получим направление вектора $\overline{w}_\kappa$.

Если $\overline{v}_r\perp\overline{\omega}_e$, т. е. если вектор $\overline{v}_r$ лежит в плоскости π, то для того, чтобы получить направление кориолисова ускорения достаточно повернуть вектор $\overline{v}_r$ в плоскости π на 90° в направлении переносного вращения; в этом случае

$$\alpha=90^\circ,\quad \sin\alpha=1,$$

и, следовательно,

$$w_к=2w_e v_r.$$

Если вектор угловой скорости переносного вращения параллелен относительной скорости $\bar{v}_r$, то либо $\alpha=0$, либо $\alpha=180^\circ$ и, следовательно, $\sin\alpha=0$, а потому в этом случае $w_к=0$.

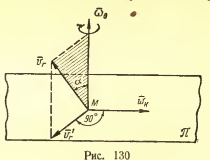


Рис. 130

Задачи этого параграфа можно решить двумя способами: геометрическим и аналитическим.

Геометрическое решение задачи состоит в построении многоугольника ускорений на основании векторного равенства (86) или (87).

При аналитическом способе решения применяется метод проекций, т. е. искомое ускорение определяется по его проекциям на выбранные координатные оси.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующие два основных типа:

ЗАДАЧИ ТИПА I

(задачи 462—464; 466—468; 470; 476—483; 489; 490)

Требуется найти модуль и направление абсолютного ускорения.

Пример 92

Полудиск радиусом $R=40$ *см* вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=0{,}5\ \frac{1}{сек}$ вокруг диаметра AB. По окружности полудиска движется точка M по закону

$$s=AM=10\pi t,$$

где s выражено в сантиметрах, t — в секундах.

Определить абсолютное ускорение точки M в момент $t=1$ *сек* (рис. 131).

Решение

Построим подвижную систему координатных осей $Ox_1y_1z_1$, неизменно связанных с полудиском. Тогда переносное движение, т. е. движение подвижной системы осей, будет вращательным вокруг оси z_1 с угловой скоростью $\omega = 0{,}5\,\frac{1}{сек}$.

Поэтому переносная скорость $\bar{v}_e$ точки M будет направлена перпендикулярно к плоскости полудиска и равна по модулю

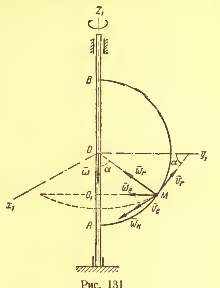


Рис. 131

$r\omega$, где r — расстояние от точки M до оси z_1, равное $R\sin\alpha$, причем при $t = 1$ будем иметь:

$$\alpha = 45^\circ,\ r = 40 \cdot \sin 45^\circ = 20\sqrt{2}\ см.$$

Так как угловая скорость переносного вращения постоянна, то переносное ускорение $\bar{w}_e$ точки M совпадает с ее нормальным переносным ускорением, т. е. $\bar{w}_e = \bar{w}_e^{(n)}$. Поэтому вектор $\bar{w}_e$ будет направлен по радиусу MO_1 окружности, описываемой той точкой полудиска, с которой совпадает в данный момент точка M; модуль этого вектора равен:

$$w_e = w_e^{(n)} = r\omega^2 = \frac{1}{4} \cdot 20\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ см/сек^2.$$

Относительное движение точки M есть движение по полуокружности AB по закону $s = 10\pi t$. Поэтому относительная скорость $\bar{v}_r$ точки M направлена по касательной к этой полуокружности и по модулю равна

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 10\pi \ \textit{см/сек}.$$

Так как

$$v_r = \text{const},$$

то относительное ускорение $\overline{w}_r$ точки M совпадает с ее нормальным относительным ускорением, т. е.

$$\overline{w}_r = \overline{w}_r^{(n)}.$$

Поэтому вектор $\overline{w}_r$ направлен по радиусу MO к центру O и по модулю равен

$$w_r = w_{rn} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{100\pi^2}{40} = \frac{5}{2}\pi^2 \ \textit{см/сек}^2.$$

Вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega}$ направлен вдоль оси z_1, а вектор $\overline{v}_r$ лежит в плоскости z_1Oy_1 и составляет с осью z_1 угол, равный $90° - \alpha$. Поэтому вектор кориолисова ускорения $\overline{w}_\kappa$ направлен перпендикулярно к плоскости z_1Oy_1, т. е. параллельно оси x_1 в сторону переносной скорости $\overline{v}_e$ и по модулю равен

$$w_\kappa = 2\omega v_r \sin(90° - \alpha) = 2\omega v_r \cos\alpha = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10\pi \cdot \cos 45° = 5\pi\sqrt{2} \ \textit{см/сек}^2.$$

По теореме Кориолиса имеем:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + \overline{w}_\kappa. \qquad \text{(a)}$$

Чтобы вычислить модуль вектора $\overline{w}_a$, найдем его проекции на координатные оси x_1, y_1 и z_1. Проектируя векторное равенство (a) на эти оси, получим:

$$w_{ax_1} = w_{ex_1} + w_{rx_1} + w_{\kappa x_1},$$

но

$$w_{ex_1} = 0, \quad w_{rx_1} = 0, \quad w_{\kappa x_1} = w_\kappa,$$

поэтому

$$w_{ax_1} = w_\kappa,$$

$$w_{ay_1} = w_{ey_1} + w_{ry_1} + w_{\kappa y_1} = -w_e - w_r \cdot \sin\alpha,$$

$$w_{az_1} = w_{ez_1} + w_{rz_1} + w_{\kappa z_1} = w_r \cos\alpha.$$

Отсюда

$$w_a = \sqrt{w_{ax_1}^2 + w_{ay_1}^2 + w_{az_1}^2} = \sqrt{w_k^2 + (w_e + w_r \sin\alpha)^2 + (w_r \cos\alpha)^2} = \sqrt{50\pi^2 + 50 + \frac{25}{4}\pi^4 + 5\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2}\pi^2\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\pi^4 + 12\pi^2 + 8} \ \textit{см/сек}^2.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

(задачи 465, 469, 471—474)

Требуется найти одно или два из составляющих ускорений.

Пример 93

Найти относительное ускорение камня A (по отношению к кулисе) и угловое ускорение кулисы в примере 86 при условии, что кривошип OA вращается равномерно, т. е. $\omega = \text{const}$ (рис. 132).

Решение

Так как абсолютное движение точки A есть равномерное вращение вокруг неподвижной оси O, то вектор $\overline{w}_a$ абсолютного ускорения этой точки направлен вдоль AO к центру O и по модулю равен

$$w_a = w_a^{(n)} = \omega^2 \cdot AO = 160\ см/сек^2.$$

Переносное движение, т. е. движение кулисы, является вращательным вокруг неподвижной оси O_1, поэтому

$$\overline{w}_e = \overline{w}_e^{(n)} + \overline{w}_e^{(\tau)},$$

вектор $\overline{w}_e^{(n)}$ направлен вдоль AO_1 к центру O_1, а вектор $\overline{w}_e^{(\tau)}$ перпендикулярен к O_1A, причем

Рис. 132

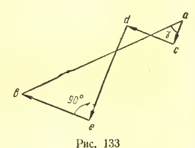


Рис. 133

$$w_e^{(n)} = O_1A \cdot \omega_1^2 = 21{,}3\ см/сек^2,$$
$$w_e^{(\tau)} = O_1A \cdot \varepsilon_1,$$

где ε_1 — угловое ускорение кулисы.

Относительное движение камня A есть прямолинейное движение вдоль прорези кулисы, поэтому вектор относительного ускорения $\overline{w}_r$ направлен вдоль AO_1.

Вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega}_1$ направлен по оси переносного вращения, т. е. перпендикулярно к плоскости рисунка, а вектор $\overline{v}_r$ относительной скорости лежит в этой плоскости, следовательно, $\overline{v}_r \perp \overline{\omega}_1$. Поэтому чтобы найти направление кориолисова ускорения $\overline{w}_к$ достаточно вектор $\overline{v}_r$ повернуть на 90° в плоскости рисунка в направлении переносного вращения. Модуль этого ускорения находим по формуле (89)

$$w_к = 2\omega_1 v_r \sin 90° = 2\omega_1 v_r = 37{,}24 \ см/сек^2.$$

По теореме Кориолиса имеем:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_r + \overline{w}_к = \overline{w}_e^{(\tau)} + \overline{w}_e^{(n)} + \overline{w}_r + \overline{w}_к.$$

Проектируя это векторное равенство на оси x_1 и y_1, направленные, как указано на рис. 132, получим:

1) $-w_a \sin\gamma = -w_e^{(\tau)} - w_к,$

2) $-w_a \cos\gamma = -w_e^{(n)} - w_r.$

Отсюда находим:

$$w_r = -w_e^{(n)} + w_a \cos\gamma = -21{,}3 + 160\,\frac{5}{2\sqrt{13}} = 89{,}62 \ см/сек^2,$$

$$w_e^{(\tau)} = w_a \sin\gamma - w_к = 160\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} - 37{,}24 = 77{,}88 \ см/сек^2$$

и

$$\varepsilon_1 = \frac{w_e^{(\tau)}}{O_1A} = 2{,}15\,\frac{1}{сек^2}.$$

Геометрический способ решения. В векторном равенстве

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e^{(\tau)} + \overline{w}_e^{(n)} + \overline{w}^{(r)} + \overline{w}^{(k)}$$

направления всех векторов и модули трех из них $(\overline{w}_a,\ \overline{w}_e^{(n)},\ \overline{w}_к)$ известны. Нужно найти модули ускорений $\overline{w}_e^{(\tau)}$ и $\overline{w}_r$.

Для этого из произвольной точки a строим в выбранном масштабе векторы $\overline{ab} = \overline{w}_a$ и $\overline{ac} = \overline{w}_e^{(n)}$ и из точки c — вектор $\overline{cd} = \overline{w}_к$ (рис. 133).

Затем из точек b и d проводим два луча, параллельных векторам $\overline{w}_r$ и $\overline{w}_e^{(\tau)}$ до их пересечения в точке e.

Тогда

$$\overline{de} = \overline{w}_e^{(\tau)},\quad \overline{eb} = \overline{w}_r,$$

$$\varepsilon = \frac{de}{O_1A}.$$

ГЛАВА V

СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этой главе рассмотрена задача, аналогичная той, которая была рассмотрена в предыдущей главе, а именно: зная относительное движение твердого тела (движение по отношению к подвижной системе отсчета) и переносное движение (движение этой подвижной системы), найти абсолютное движение тела, т. е. его движение по отношению к системе отсчета, принимаемой за неподвижную. При этом ограничимся наиболее важным частным случаем этой задачи, когда относительное движение тела и переносное движение являются вращательными вокруг параллельных или пересекающихся осей. Из таких задач нужно особенно обратить внимание на те, в которых рассматриваются, во-первых, дифференциальные механизмы (задачи 588, 589, 615, 622—633) и, во-вторых, планетарные механизмы (задачи 580—584, 593, 613). Дифференциальными механизмами называются зубчатые механизмы с несколькими степенями подвижности, а планетарными механизмами называются зубчатые механизмы с одной степенью подвижности. Внешним признаком задачи, относящейся к дифференциальному механизму, является то, что в такой задаче заданы по крайней мере две угловые скорости, а в задачах, относящихся к планетарным механизмам, задается одна угловая скорость.

§ 1. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Если относительное движение тела и переносное движение являются вращательными вокруг параллельных осей, то распределение абсолютных скоростей в теле в каждый данный момент будет таким же, как и при вращательном движении вокруг оси, называемой **мгновенной** осью вращения тела. При этом мгновенная ось вращения параллельна осям переносного и относительного вращений и делит расстояние O_1O_2 между ними внутренним образом (если направления переносного и относительного вращений совпадают) или внешним образом (если направления этих вращений противоположны) на части, обратно пропорциональные относительной и переносной угловым скоростям, т. е.

$$\frac{\omega_e}{O_1C}=\frac{\omega_r}{CO_2}=\frac{\omega_a}{O_1O_2}, \tag{90}$$

где ω_e, ω_r и ω_a — соответственно переносная относительная и абсолютная угловые скорости (рис. 134).

Если направления угловых скоростей $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$ совпадают, то абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}_a$ направлена в ту же сторону и по модулю равна их сумме:

$$\omega_a=\omega_e+\omega_r. \tag{91}$$

Если же векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{\omega}_r$ направлены в противоположные стороны, то абсолютная угловая скорость $\bar{\omega}_a$ направлена в сторону большего из них и по модулю равна их разности, т. е.

$$\omega_a = \omega_r - \omega_e,$$

если

$$\omega_r > \omega_e,$$

и

$$\omega_a = \omega_e - \omega_r,$$

если

$$\omega_e > \omega_r \text{ (рис. 135).} \tag{92}$$

Если же относительная и переносная угловые скорости равны по модулю и антипараллельны, т. е. образуют *пару угловых*

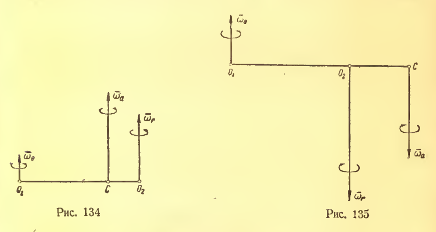


Рис. 134

Рис. 135

скоростей, то абсолютная скорость любой точки в данный момент равна вектору-моменту этой пары, и, следовательно, распределение абсолютных скоростей в теле, будет таким же, как при *поступательном* движении тела.

Пример 94

Редуктор скоростей имеет неподвижную шестеренку *II*, спаренные между собой шестерни *III* и *IV*, свободно сидящие на подвижной оси O, вращающейся вместе с ведущим валом *I*, и шестерню *V*, заклиненную на ведомом валу *VI*. Шестерни *III* и *IV* имеют внутреннее зацепление с шестернями *II* и *V*. Найти число оборотов в минуту ведомого вала, если числа зубцов шестерен *II*, *III*, *IV* и *V* соответственно равны: $z_2 = 30$, $z_3 = 70$, $z_4 = 80$, $z_5 = 20$; ведущий вал *I* вращается вокруг оси O_1 с угловой скоростью, соответствующей $n_1 = 1200$ *об/мин* (рис. 136 и 137).

Решение

1-й способ. В этой задаче дан планетарный механизм, так как он имеет одну степень подвижности. В соответствии с этим здесь задана одна угловая скорость ω_1 ведущего вала I.

Если вращение ведущего вала вокруг оси O_1, направленное против часовой стрелки, примем за переносное движение, то движение всех других колес по отношению к валу будет относительным вращательным движением.

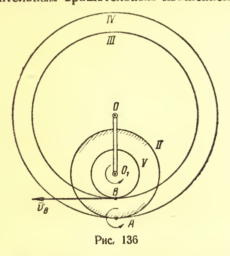


Рис. 136

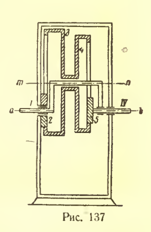


Рис. 137

Обозначим *алгебраические* значения абсолютных угловых скоростей шестерен III, IV, II, V через ω_3, ω_4, ω_2, ω_5, а алгебраические значения относительных угловых скоростей этих шестерен, т. е. угловых скоростей их вращательных движений по отношению к ведущему валу — ω_{31}, ω_{41}, ω_{21}, ω_{51}*. При этом если вращение направлено в ту же сторону, что и вращение вала I, т. е. против часовой стрелки, то угловую скорость этого вращения будем считать *положительной;* в противном случае будем считать угловую скорость *отрицательной.* Тогда, принимая во внимание, что переносная угловая скорость равна ω_1, на основании теоремы о сложении вращений вокруг параллельных осей будем иметь:

$$\omega_{31} = \omega_3 - \omega_1,$$
$$\omega_{41} = \omega_4 - \omega_1,$$
$$\omega_{51} = \omega_5 - \omega_1,$$
$$\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1.$$

Но относительные угловые скорости двух сцепленных шестерен обратно пропорциональны числам их зубьев и при внутрен-

* Осью относительного вращения для шестерен III, IV является ось O, а для шестерен II и V — ось O_1.

нем зацеплении имеют одинаковые знаки, а при внешнем зацеплении — разные знаки (см. учебник И. М. Воронкова, стр. 360—361);

поэтому

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{51}}=\frac{z_5}{z_3}, \quad \frac{\omega_{21}}{\omega_{41}}=\frac{z_4}{z_2}.$$

Перемножив эти два равенства и учитывая, что $\omega_2=0$ (так как шестерня *II* неподвижная) и что $\omega_{31}=\omega_{41}$ (так как шестерни *III* и *IV* спарены), получим:

$$\frac{-\omega_1}{\omega_5-\omega_1}=\frac{z_5}{z_3}\,\frac{z_4}{z_2}=\frac{20}{70}\,\frac{80}{30}=\frac{16}{21},$$

откуда

$$\omega_5=-\frac{5}{16}\omega_1.$$

Так как шестерня *V* жестко скреплена с ведомым валом *VI*, то

$$\omega_6=\omega_5=-\frac{5}{16}\omega_1,$$

и, следовательно,

$$n_6=n_5=-\frac{5}{16}n_1=-375 \text{ об/мин}.$$

Так как $\omega_6<0$, то вращение ведомого вала происходит в направлении, противоположном вращению вала *I*, т. е. по часовой стрелке.

2-й способ. Так как шестерня *IV* сцеплена с *неподвижной* шестерней *II*, то абсолютная скорость точки *A* шестерни *IV* (точки сцепления) в данный момент равна нулю (рис. 136). Отсюда следует, что мгновенная ось вращения спаренных шестерен *III* и *IV* проходит через точку *A*. Так как точка *A* лежит вне отрезка OO_1, то она делит расстояние OO_1 между осями относительного и переносного вращений внешним образом на части, обратно пропорциональные угловым скоростям этих вращений, и, следовательно, направления этих вращений противоположны, т. е. угловые скорости ω_{31} и ω_1 имеют разные знаки.

Поэтому

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_1}=-\frac{O_1A}{OA}=-\frac{r_2}{r_4},$$

где r_2 и r_4 — радиусы шестерен *II* и *IV*.

Отсюда, принимая во внимание, что числа зубцов пропорциональны радиусам шестерен, находим:

$$\omega_{31}=-\frac{z_2}{z_4}\omega_1=-\frac{3}{8}\omega_1.$$

Абсолютная угловая скорость шестерни *III* равна

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_{31} = \frac{5}{8}\omega_1.$$

Так как $\omega_3 > 0$, то спаренные шестерни *III* и *IV* вращаются вокруг мгновенной оси A против часовой стрелки. Поэтому скорость точки зацепления B шестерен *III* и *V* направлена влево, как указано на рисунке, и по модулю равна

$$v_B = \frac{5}{8}\omega_1 \cdot AB = \frac{5}{3}\omega_1 (r_2 - r_5).$$

где r_5 — радиус колеса V. С другой стороны, скорость точки B, принадлежащая колесу V, равна по модулю $|\omega_5| \cdot r_5$, где $|\omega_5|$ — абсолютное значение угловой скорости колеса V. Таким образом, приходим к равенству

$$r_5 |\omega_5| = \frac{5}{8}(r_2 - r_5) \cdot \omega_1,$$

откуда

$$|\omega_5| = \frac{5}{8}\left(\frac{r_2}{r_5} - 1\right)\omega_1 = \frac{5}{8}\left(\frac{z_2}{z_5} - 1\right) \cdot \omega_1 =$$
$$= \frac{5}{8}\left(\frac{3}{2} - 1\right)\omega_1 = \frac{5}{16}\omega_1.$$

Принимая во внимание направление вектора $\overline{v}_B$, видим, что колесо V вращается вокруг оси O_1 по часовой стрелке; следовательно,

$$\omega_5 = -\frac{5}{16}\omega_1 \text{ и } n_5 = -\frac{5}{16}n_1 = -375 \text{ об/мин}.$$

Пример 95

Найти угловую скорость ведомого вала *II* редуктора с дифференциальной передачей, если ведущий вал *I*, жестко скрепленный с кривошипом O_1O_2, на котором свободно сидят две пары, жестко соединенных между собой шестерен *IV* и *V*, вращается с угловой скоростью, равной $140 \frac{1}{сек}$. Колесо *III* с числом зубцов $z_3 = 70$ вращается с угловой скоростью, равной $180 \frac{1}{сек}$ в направлении, противоположном направлению вращения вала *I*, и имеет внутреннее зацепление с шестернями *IV*; бегающие шестерни *IV* и *V* (сателлиты) имеют числа зубцов, равные $z_4 = 20$ и $z_5 = 30$. Колесо *VI*, имеющее внутреннее зацепление с шестернями *V*, заклинено на ведомом валу *II* и имеет число зубцов $z_6 = 80$ (рис. 138 и 139).

Решение

В данной задаче мы имеем дифференциальный механизм, так как он обладает двумя степенями подвижности. В соответствии с этим заданы две угловые скорости: колеса *III* и ведущего вала *I*.

Пусть ведущий вал *I* вращается вместе с кривошипом вокруг оси *ab* (или вокруг оси *O* на рис. 139) с угловой скоростью ω_1 против часовой стрелки; примем это вращательное движение

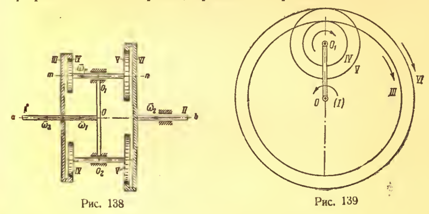


Рис. 138 Рис. 139

за переносное и обозначим алгебраические значения абсолютных и относительных по отношению к валу *I* угловых скоростей колес *III*, *IV*, *V*, *VI* соответственно

$$\omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6 \text{ и } \omega_{31},\ \omega_{41},\ \omega_{51},\ \omega_{61}.$$

Тогда, аналогично предыдущей задаче будем иметь:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{41}} = \frac{z_4}{z_3},\ \frac{\omega_{51}}{\omega_{61}} = \frac{z_6}{z_5}.$$

Так как шестерни *IV* и *V* спарены, то $\omega_{41} = \omega_{51}$.

Поэтому, перемножая предыдущие пропорции, получим:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{61}} = \frac{z_4 z_6}{z_3 z_5},$$

или

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_6 - \omega_1} = \frac{z_4}{z_3}\ \frac{z_6}{z_5} = \frac{20 \cdot 80}{70 \cdot 30} = \frac{16}{21},$$

откуда

$$\omega_6 = \omega_1 + \frac{21}{16}\omega_{31} = \omega_1 + \frac{21}{16}(\omega_3 - \omega_1).$$

Но

$$\omega_1 = 140\,\frac{1}{сек} \text{ и } \omega_3 = -180\,\frac{1}{сек},$$

поэтому

$$\omega_6 = 140 - \frac{21}{16}\,320 = -\,280\,\frac{1}{сек}.$$

Так как колесо *VI* жестко скреплено с ведомым валом *II*, то искомая угловая скорость

$$\omega_2 = \omega_6 = -\,280\,\frac{1}{сек}.$$

Отрицательное значение угловой скорости ω_2 показывает, что направления вращений валов *I* и *II* противоположны.

§ 2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Если относительное движение тела и переносное движение являются вращательными вокруг пересекающихся осей, то распределение абсолютных скоростей в теле в данный момент будет таким же, как при вращательном движении тела вокруг

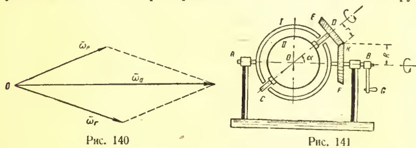


Рис. 140 Рис. 141

оси, проходящей через точку пересечения заданных осей и направленной по диагонали параллелограмма, построенного на векторах относительной и переносной угловых скоростей. Эта ось называется мгновенной осью вращения тела.

Вектор абсолютной угловой скорости, т. е. угловой скорости, с которой тело вращается вокруг мгновенной оси, равен геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r \text{ (рис. 140).} \qquad (93)$$

Пример 96

Шаровая дробилка состоит из полого шара *II* (в нем находятся шары и вещество, подвергающееся дроблению), сидящего на оси *CD*, на которой заклинено коническое зубчатое колесо *E* радиусом *r*. Ось *CD* сидит в подшипниках в раме *I*, составляющей одно целое с осью *AB* и приводящейся во вращение при помощи рукоятки *G*. Колесо *E* сцепляется с **неподвижным** колесом *F* радиусом *R*. Определить абсолютную угловую скорость

шаровой дробилки, если рукоятка вращается с угловой скоростью ω_0; угол между осями AB и CD равен α (рис. 141).

Решение

Если за подвижную систему отсчета выберем систему осей, неизменно связанную с рамой I, то переносное движение будет вращательным вокруг оси AB с угловой скоростью ω_0. Допустим, что это вращение происходит в направлении, указанном на рис. 140. Тогда вектор $\overline{\omega}_e$ переносной угловой скорости будет направлен вдоль AB вправо, причем $\omega_e = \omega_0$. Так как колесо E, неизменно соединенное с шаровой дробилкой II, сцепляется с неподвижным колесом F, то при вращении рамы I вокруг

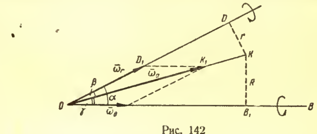


Рис. 142

оси AB шаровая дробилка будет вращаться вокруг оси CD. Это вращение шаровой дробилки вокруг оси CD является ее относительным движением. Следовательно, вектор $\overline{\omega}_r$ относительной угловой скорости направлен вдоль оси CD.

Если точку зацепления колес E и F обозиачим K (рис. 142) то, поскольку колесо F неподвижно, абсолютная скорость точки K равна нулю; второй точкой, абсолютная скорость которой также равна иулю, является, очевидио, неподвижный центр O шара II. Отсюда следует, что мгновеиная ось результирующего (абсолютного) вращения дробилки совпадает с прямой OK.

Абсолютная угловая скорость $\overline{\omega}_a$ дробилки определяется по формуле

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r.$$

Так как вектор $\overline{\omega}_e$ известен, то для построения параллелограмма угловых скоростей нужио провести из конца вектора $\overline{\omega}_e$ прямую, параллельную OD, до пересечения с OK в точке K_1 и из точки K_1 — прямую, параллельную OB до пересечения с OD в точке D_1. Тогда

$$\overline{OK_1} = \overline{\omega}_a \text{ и } \overline{OD_1} = \overline{\omega}_r.$$

Из треугольника OD_1K_1 имеем:

$$\frac{\omega_r}{\sin\gamma} = \frac{\omega_e}{\sin\beta},$$

откуда

$$\omega_r = \omega_e \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

но

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{R}{OK} : \frac{r}{OK} = \frac{R}{r},$$

поэтому

$$\omega_r = \frac{R}{r}\,\omega_e = \frac{R}{r}\,\omega_0.$$

Искомую абсолютную угловую скорость дробилки находим по формуле

$$\omega_a = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 + 2\omega_e \cdot \omega_r \cdot \cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{R^2}{r^2}\omega_0^2 + 2\omega_0^2\frac{R}{r}\cos\alpha} = \frac{\omega_0}{r} \times$$
$$\times \sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr\cos\alpha}.$$

Пример 97

В дифференциале зуборезного станка зубчатое колесо IV сидит свободно на ведущем валу I. На конце ведущего вала находится головка, несущая ось ab сателлитов II, сцепленных с колесами III и IV.

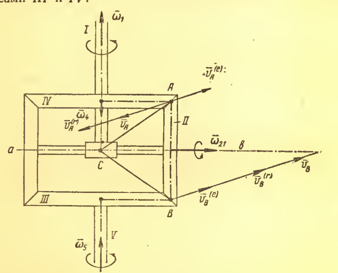


Рис. 143

Определить угловую скорость ведомого вала V, жестко скрепленного с колесом III, если угловая скорость ведущего вала равна ω_1, а колесо IV вращается с угловой скоростью ω_4 в направлении, противоположном вращению вала I (рис. 143).

Решение

1-й способ. Так как в этой задаче мы имеем дифференциал, т. е. механизм с двумя степенями подвижности, то в соответствии с этим заданы две угловые скорости: ω_1 и ω_4.

Движение сателлита *II* можно рассматривать как сложное.

Если вращение ведущего вала *I* вместе с осью *ab* принять за переносное движение, то вращение колеса *II* вокруг горизонтальной оси *ab* будет относительным движением; угловую скорость этого относительного вращения обозначим ω_{21}.

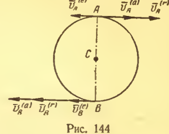


Рис. 144

Допустим, что вращение вала *I* происходит в направлении, указанном на рисунке. Тогда вектор переносной угловой скорости $\overline{\omega}_e = \overline{\omega}_1$ направлен по вертикали вверх. Так как колесо *IV* вращается в направлении, противоположном вращению вала *I*, то вектор $\overline{\omega}_4$ угловой скорости этого колеса направлен по вертикали вниз.

Отсюда следует, что векторы $\overline{v}_A^{(e)}$ и $\overline{v}_A$ переносной и абсолютной скоростей точки зацепления *A* колес *II* и *IV* направлены по одной прямой в противоположные стороны, как показано на рис. 144 и по модулю соответственно равны:

$$v_A^{(e)} = \omega_1 \cdot r_4 \text{ и } v_A = \omega_4 \cdot r_4,$$

где r_4 — радиус колеса *IV*.

Отсюда, на основании теоремы сложения скоростей, заключаем, что вектор $\overline{v}_A^{(r)}$ относительной скорости точки *A* направлен по той же прямой и в ту же сторону, что и вектор $\overline{v}_A$, причем $v_A = v_A^{(r)} - v_A^{(e)}$. Но вектор $\overline{v}_A^{(r)}$ по модулю, очевидно, равен $\omega_{21} r_2$, где r_2 — радиус колеса *II*, а потому

$$\omega_4 \cdot r_4 = \omega_{21} \cdot r_2 - \omega_1 \cdot r_4. \qquad \text{(a)}$$

Рассмотрим далее точку зацепления *B* колес *II* и *III*, принадлежащую колесу *II*, и найдем ее абсолютную скорость v_B.

Так как переносная и относительная скорости $\overline{v}_B^{(e)}$ и $\overline{v}_B^{(r)}$ точки *B* направлены по одной прямой в одну и ту же сторону, как указано на рисунке, и по модулю соответственно равны:

$$\omega_1 r_3 \text{ и } \omega_{21} \cdot r_2,$$

то

$$v_B = \omega_1 \cdot r_3 + \omega_{21} r_2,$$

где r_3 — радиус колеса *III*. С другой стороны, абсолютная скорость точки *B*, принадлежащей колесу *III*, равна

$$\omega_3 \cdot r_3,$$

поэтому

$$\omega_3 \cdot r_3 = \omega_1 \cdot r_3 + \omega_{21} \cdot r_2. \qquad (б)$$

Итак, мы получили два уравнения (а) и (б) с двумя неизвестными ω_3 и ω_{21}. Вычитая (а) из (б) и замечая, что

$$r_3 = r_4,$$

получим:

$$\omega_3 - \omega_4 = 2\omega_1,$$

или

$$\omega_3 = 2\omega_1 + \omega_4.$$

Так как колесо *III* жестко скреплено с валом *V*, то искомая угловая скорость ведомого вала

$$\omega_5 = \omega_3 = 2\omega_1 + \omega_4.$$

Принимая во внимание направление вектора $\bar{v}_B$, видим, что колесо *III* вместе с валом *V* вращаются в том же направлении, что и вал *I*, т. е. вектор $\bar{\omega}_5$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar{\omega}_1$.

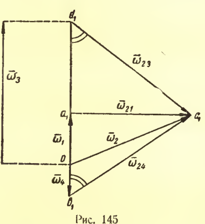


Рис. 145

2-й способ (геометрический). Построим векторы угловых скоростей вала *I* и колеса *IV*, заданные в задаче,

$$\overline{Oa_1} = \bar{\omega}_1 \text{ и } \overline{Ob_1} = \bar{\omega}_4 \quad \text{(рис. 145)}.$$

За переносное движение примем вращение колеса *IV* вокруг неподвижной вертикальной оси. Тогда относительная скорость точки *A* колеса *II*, т. е. ее скорость относительно колеса *IV*, равна нулю; поэтому мгновенная ось относительного вращения колеса *II* проходит через точки *C* и *A*; следовательно, вектор $\bar{\omega}_{24}$ относительной угловой скорости колеса *II* по отношению к колесу *IV* направлен по прямой *CA* (рис. 143). Так как

$\bar\omega_2 = \bar\omega_4 + \bar\omega_{24}$, то конец вектора $\bar\omega_2$ абсолютной угловой скорости колеса *II* на рис. 145 должен лежать на прямой, выходящей из точки b_1 и параллельной прямой CA (рис. 143). С другой стороны вектор $\bar\omega_{21}$ относительной угловой скорости колеса *II* по отношению к валу *I* направлен по горизонтальной оси ab (рис. 143). Так как

$$\bar\omega_2 = \bar\omega_1 + \bar\omega_{21},$$

то конец вектора $\bar\omega_2$, показанного на рис. 145, должен лежать на горизонтальной прямой, выходящей из точки a_1. Поэтому на рис. 145 из точки a_1 проводим прямую, параллельную ab, и из точки b_1 — прямую, параллельную CA, до их пересечения в точке c_1.

Соединив точки o и c_1, будем иметь:

$$\overline{oc_1} = \bar\omega_2, \quad \overline{b_1c_1} = \bar\omega_{24} \quad \text{и} \quad \overline{a_1c_1} = \bar\omega_{21}.$$

Если теперь за переносное движение примем вращение колеса *III* вокруг неподвижной вертикальной оси с угловой скоростью $\bar\omega_3$, то аналогично предыдущему убедимся, что вектор $\bar\omega_{23}$ относительно угловой скорости колеса *II* по отношению к колесу *III* будет направлен по прямой CB (рис. 143). Поэтому проведем из точки c_1 (рис. 145) прямую, параллельную CB, до пересечения в точке d_1 с продолжением отрезка Oa_1.

Тогда будем иметь:

$$\bar\omega_2 = \overline{Oc_1} = \overline{od_1} + \overline{d_1c_1}.$$

Но, с другой стороны,

$$\bar\omega_2 = \bar\omega_3 + \bar\omega_{23}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar\omega_3 = \overline{od_1} \quad \text{и} \quad \bar\omega_{23} = \overline{d_1c_1}.$$

Так как колесо *III* жестко скреплено с валом *V*, то искомая угловая скорость $\bar\omega_5$ ведомого вала равна $\bar\omega_3$ и, следовательно, $\bar\omega_5 = \overline{od_1}$.

Так как треугольник CAB (рис. 143) равнобедренный, то подобный ему треугольник $b_1d_1c_1$ (рис. 145) также равнобедренный, а потому

$$a_1d_1 = a_1b_1 = a_1o + ob_1 = \omega_1 + \omega_4.$$

Следовательно,

$$\omega_5 = od_1 = oa_1 + a_1d_1 = \omega_1 + (\omega_1 + \omega_4) = 2\omega_2 + \omega_4.$$

ДИНАМИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

ГЛАВА I
ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

В динамике изучается движение механических систем в связи с действующими на них силами. Простейшим объектом механики является *материальная точка* — тело, размерами которого при решении данной задачи можно пренебречь.

Если на положение материальной точки и на ее движение не наложены никакие ограничения, то точка называется *свободной*, в противном случае будем иметь движение *несвободной* точки. Условия, которые накладывают определенные ограничения на положения материальной точки и на ее движение, называются *связями*, наложенными на эту точку. Материальное тело, при помощи которого осуществляется связь, наложенная на данную материальную точку, действует на эту точку с некоторой силой, называемой *реакцией этой связи*.

Согласно закону равенства действия и противодействия, сила, с которой материальная точка действует на тело, осуществляющее связь, равна по модулю и прямо противоположна по направлению реакции этой связи.

На основании второго и четвертого законов динамики имеем:

$$m\overline{w}=m\frac{d\overline{v}}{dt}=\overline{F}, \tag{94}$$

где m — масса материальной точки, $\overline{w}$ — ее ускорение и $\overline{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к этой точке, включая (в случае несвободной точки) и реакции связей.

В технической системе единиц масса измеряется в $кГ \cdot сек^2 \cdot м^{-1}$. Обычно массу тела находят как отношение его веса P, выраженного в $кГ$, к ускорению силы тяжести $g=9{,}81$ $м/сек^2$, т. е.

$$m=\frac{P}{g}. \qquad (95)$$

Проектируя векторное равенство (94) на оси той или иной системы координат, получаем *дифференциальные уравнения* движения материальной точки в этой системе.

В прямоугольной системе декартовых координат имеем:

$$m\ddot{x}=X; \quad m\ddot{y}=Y; \quad m\ddot{z}=Z, \qquad (96)$$

где x, y, z — координаты точки, а X, Y, Z — проекции действующей силы (равнодействующей) на соответствующие оси. В случае несвободной точки к этим уравнениям присоединяются *уравнения связей*. Если точка движется прямолинейно, то, принимая эту прямую за ось x, будем иметь:

$$m\ddot{x}=X. \qquad (97)$$

В системе естественных осей имеем:

$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau; \quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n; \quad 0=F_b, \qquad (98)$$

где v — скорость точки, ρ — радиус кривизны траектории, F_τ, F_n, F_b — проекции действующей силы соответственно на касательную, главную нормаль и бинормаль траектории.

Уравнения (98) называются *эйлеровыми* или *естественными* уравнениями движения материальной точки.

Пользуясь уравнениями (96) и (98), можно решать две основные задачи динамики точки.

§ 2. Первая основная задача динамики точки

Эта задача заключается в том, что по заданному движению и известной массе материальной точки требуется определить силу, действующую на эту точку, или, если на материальную точку действует несколько сил,— определить одну из них.

Решение этой задачи сводится к определению ускорения точки, которое, в том случае, когда движение точки задано, нетрудно найти по правилам кинематики.

Задачи этого параграфа можно разделить на следующих два основных типа в зависимости от траектории движущейся точки:

I. Задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки;

II. Задачи, относящиеся к криволинейному движению точки.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Задачи этого типа, в которых рассматривается прямолинейное движение точки, решаются при помощи уравнения (97); их можно разделить на две группы.

Первая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложена одна сила. Необходимо определить эту силу.

Пример 98

Материальная точка массой $m=400$ *г* совершает гармонические колебания по горизонтальной оси Ox по закону $x=20\sin\frac{\pi}{2}t$ (x выражено в *см*, t — в *сек*). Найти силу, действующую на точку в функции от x.

Решение

Находим проекцию ускорения точки на ось Ox:

$$w_x=\ddot{x}=-5\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t\ \frac{см}{сек^2}.$$

Далее находим проекцию на ось действующей силы:

$$X=mw_x=-400\cdot5\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t=-2000\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t.$$

Но $\sin\frac{\pi}{2}t=\frac{x}{20}$, а потому $X=-100\pi^2\cdot x$ *дин*, или $X=-986x$ *дин*.

Так как проекция силы на ось Ox и координата x движущейся точки противоположны по знаку, то искомая сила направлена вдоль оси Ox к началу координат O.

По модулю эта сила равна $986|x|$, т. е. пропорциональна расстоянию от движущейся точки до начала O.

Ко второй группе относятся задачи, в которых к движущейся материальной точке приложено несколько сил, причем требуется найти одну из них.

В этой группе следует отметить такие задачи, в которых требуется определить неизвестную реакцию связи, что характерно для движения несвободной материальной точки.

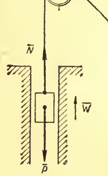


Рис. 146

Пример 99

Клеть весом $P=3000$ *кГ* поднимается с ускорением $w=0{,}49$ *м/сек²*. Определить натяжение каната, при помощи которого поднимается клеть (рис. 146).

Решение

На клеть действуют две силы: натяжения $\overline{N}$ каната и вес $\overline{P}$ клети, причем $N>P$, так как ускорение клети направлено в сторону силы F. Равнодействующая этих сил $R=N-P$.

В данном случае можно применить непосредственно уравнение (94), тогда получим:

$$mw = N - P,$$

откуда $N = P + mw = P + \frac{P}{g} w = P\left(1 + \frac{w}{g}\right).$

После подстановки числовых значений имеем

$$N = 3150 \ кГ.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение материальной точки, можно также разделить на две группы, как и задачи первого типа.

Первая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложена одна сила и требуется определить эту силу.

Если движение точки задано уравнениями в декартовых координатах:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)\ldots, \qquad (99)$$

где x, y, z — координаты точки, t — время, то на основании уравнений (96) находим проекции искомой силы на три координатные оси:

$$X = m\ddot{x} = mf_1''(t); \quad Y = m\ddot{y} = mf_2''(t); \quad Z = m\ddot{z} = mf_3''(t). \quad (100)$$

Затем нужно найти модуль действующей силы $\overline{F}$ и ее направляющие косинусы по формулам:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},\ \ldots \qquad (101)$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{F}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{F}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{F}\ldots \qquad (102)$$

Пример 100

Материальная точка массой $m = 0{,}5 \frac{кГ \cdot сек^2}{м}$ совершает движение, согласно уравнениям:

$$x = 2t^2 + 1; \quad y = t^2 + 1, \quad z = t^3 - 1,$$

причем координаты точки выражены в метрах, время — в секундах. Определить величину и направление силы, действующей на точку, в момент $t = 1$ *сек*.

Решение

1. Находим проекции скорости данной точки на оси координат:

$$\dot{x} = 4t; \quad \dot{y} = 2t; \quad \dot{z} = 3t^2.$$

2. Находим проекции ускорения точки на оси координат:

$$\ddot{x}=4; \quad \ddot{y}=2; \quad \ddot{z}=6t=6 \quad (\text{при } t=1).$$

3. На основании уравнений (96) находим проекции силы на оси координат:

$$X=m\ddot{x}=2 \text{ кГ}; \quad Y=m\ddot{y}=1 \text{ кГ}; \quad Z=m\ddot{z}=3 \text{ кГ}.$$

4. По формулам (101) и (102) находим модуль силы и направляющие косинусы:

$$F=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74 \text{ кГ};$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{3{,}74}=0{,}334; \quad \cos\beta=\frac{1}{3{,}74}=0{,}267;$$

$$\cos\gamma=\frac{3}{3{,}74}=0{,}804,$$

откуда

$$\alpha=57°41'; \quad \beta=74°30'; \quad \gamma=36°42'.$$

Если же движение точки задано естественным способом, т. е. задана траектория точки и закон ее движения по этой траектории будет $s=f(t)$, то следует, воспользовавшись уравнениями (98), найти проекции искомой силы $\bar{F}$ на естественные оси, а затем по этим проекциям вычислить ее модуль.

Пример 101

Материальная точка массой $m=2$ т. е. м. описывает криволинейную траекторию по закону $s=12\sin\frac{t}{2}$ (s выражено в *м*, t — в *сек*). В данный момент она занимает положение M и имеет скорость $v=3$ *м/сек*, причем радиус кривизны траектории в точке M равен 6 *м*. Найти в этот момент силу, действующую на эту материальную точку.

Решение

Находим скорость точки и проекции ее ускорения на касательную и главную нормаль траектории:

$$v=\frac{ds}{dt}=6\cos\frac{t}{2}; \quad w_\tau=\frac{dv}{dt}=-3\sin\frac{t}{2}; \quad w_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v^2}{6}.$$

Согласно условию, в данный момент t имеем $v=3$ *м/сек*; поэтому $6\cos\frac{t}{2}=3$, откуда $\cos\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$ и $\frac{t}{2}=\frac{\pi}{3}$, или $t=\frac{2\pi}{3}$ *сек*.

Следовательно, в этот момент

$$w_\tau=-3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$w_n=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

Теперь, на основании уравнений (98), находим проекции искомой силы на касательную и главную нормали

$$F_\tau = m\,w_\tau = -3\sqrt{3}, \quad F_n = m w_n = 3.$$

Отсюда искомая сила $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 6$ *кГ*.

Вторая группа

Задачи, в которых к движущейся материальной точке приложены несколько сил и одну из них требуется найти.

В этой группе, также как и в задачах второй группы типа I, часто встречаются такие задачи, где требуется определить неизвестную реакцию связи при движении несвободной материальной точки.

Пример 102

В вагоне поезда, идущего равномерно по криволинейному пути со скоростью 72 *км/час*, производится взвешивание груза на пружинных весах; вес груза $P = 5$ *кГ*,

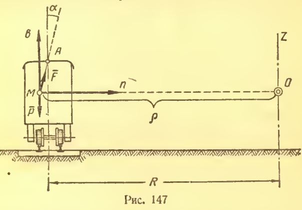


Рис. 147

а радиус закругления пути равен $R = 200$ *м*. Определить показание пружинных весов (силу натяжения пружины).

Решение

К центру тяжести M груза приложены силы $\overline{P}$ (вес) и $\overline{F}$ (реакция пружины), действующие в вертикальной плоскости (рис. 147).

Главная нормаль n траектории точки M направлена по горизонтали к центру O закругления, а бинормаль b — по вертикали вверх; касательная к этой траектории направлена перпендикулярно к плоскости рисунка. Угол отклонения от вертикали подвешенного на пружине груза обозначим α. Для решения задачи воспользуемся уравнениями (98).

Первое из этих уравнений обращается в тождество, так как при $v=72$ *км/час* $=20$ *м/сек* $=\text{const}$ проекция ускорения на касательную $w_\tau=0$ и проекция каждой из сил $\overline{P}$ и $\overline{F}$ на касательную тоже равна нулю. Тогда для решения задачи остаются уравнения проекций на главную нормаль и бинормаль:

$$\frac{mv^2}{\rho}=P_n+F_n=F\sin\alpha,$$
$$0=P_b+F_b=-P+F\cos\alpha.$$

Отсюда, учитывая, что $m=\frac{P}{g}$ и $\rho=R$,
получаем: $F\cos\alpha=P$,

$$F\sin\alpha=\frac{P}{g}\cdot\frac{v^2}{R};$$

следовательно, $F=P\sqrt{1+\frac{v^4}{g^2R^2}}=5\sqrt{1+\frac{4}{9{,}81^2}}\approx 5{,}1$ *кГ*.

Пример 103

Материальная точка массой m движется в плоскости Oxy в сопротивляющейся среде под действием силы притяжения к центру O, равной $\overline{F}=-k^2m\overline{r}$, где $k=\text{const}$, $\overline{r}$ — радиус-вектор этой точки. Найти силу сопротивления среды $\overline{F}_1$ как функцию скорости, если известны уравнения движения точки:

$$x=ae^{-nt}(\sin k_1t+\alpha),$$
$$y=be^{-nt}\sin(k_1t+\beta),\ \text{причем}\ k_1=\sqrt{k^2-n^2}.$$

Решение

1. Находим проекции скорости и ускорения движущейся точки на ось Ox:

$$v_x=\dot{x}=ae^{-nt}[k_1\cos(k_1t+\alpha)-n\sin(k_1t+\alpha)],$$
$$w_x=\ddot{x}=ae^{-nt}[(n^2-k_1^2)\sin(k_1t+\alpha)-2nk_1\cos(k_1t+\alpha)].$$

Так как $n^2-k_1^2=2n^2-k^2$, то

$$w_x=-k^2ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)-2ane^{-nt}\times$$
$$\times[k_1\cos(k_1t+\alpha)-n\sin(k_1t+\alpha)]=-k^2x-2nv_x.$$

На основании уравнений (96) имеем: $mw_x=X=F_x+F_{1x}$;
но

$$F_x=-k^2mr_x=-k^2mx,$$

а потому

$$mw_x=-k^2mx+F_{1x},$$

или

$$-mk^2x-2mnv_x=-k^2mx+F_{1x}.$$

откуда

$$F_{1x} = -2mnv_x.$$

Аналогично находим $F_{1y} = -2mnv_y$. Следовательно, искомая сила $\bar{F}_1 = -2mn\bar{v}$, т. е. сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки и направлена противоположно этой скорости.

Таблица 11

Классификация задач

Группы	Типы задач	
	I (прямолинейное движение)	II (криволинейное движение)
1-ая (к движущейся точке приложена одна сила)	Задачи 649—651 *	Задачи 652, 672, 673
2-ая (к движущейся точке приложено несколько сил)	Задачи 637, 638, 640, 648, 653—655, 658, 659—661, 662	Задачи 644—646, 656, 663, 667, 669, 670, 671

§ 3. Вторая основная задача динамики точки

Эта задача заключается в том, что по заданным силам, приложенным к движущейся материальной точке, массе этой точки и начальным условиям ее движения (начальному положению и начальной скорости), требуется определить движение этой точки. Для решения этой задачи необходимо:

1) установить, какие силы действуют на материальную точку;

2) составить дифференциальные уравнения движения точки в форме (96) или (98);

3) проинтегрировать эти уравнения;

4) определить по начальным условиям движения произвольные постоянные, которые войдут в интегралы этих уравнений.

Если интегрирование дифференциальных уравнений движения точки сводится к квадратурам, как в приводимых ниже примерах, то будем вычислять эти квадратуры в соответствующих пределах, т. е. будем вычислять о п р е д е л е н н ы е интегралы, причем нижние пределы интегрирования определяются начальными условиями движения точки. Тогда отпадает необходимость определения произвольных постоянных. Заметим, что почти во всех задачах, помещенных в сборнике И. В. Мещерского и относящихся ко второй основной задаче динамики точки, имеются два

* Номера задач указаны из сборника И. В. Мещерского, изд. 1950 г. и последующих изданий.

типа дифференциальных уравнений: или уравнения с разделяющимися переменными или линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Задачи этого параграфа можно разделить на следующих три основных типа.

I. Задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки.

II. Задачи, относящиеся к криволинейному движению свободной материальной точки.

III. Задачи, относящиеся к криволинейному движению несвободной материальной точки.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Задачи этого типа, в которых рассматривается прямолинейное движение точки, можно разделить на четыре группы.

Первая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке постоянна.

Пример 104

По прямолинейному участку железнодорожного пути с углом наклона α вниз движется вагон с постоянной скоростью.

Считая сопротивление движению пропорциональным нормальному давлению, определить закон движения этого вагона, если

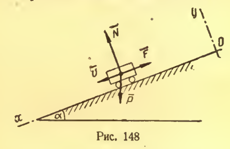


Рис. 148

он будет двигаться вниз без начальной скорости по прямолинейному участку пути с углом наклона $\beta > \alpha$ (рис. 147 и 148).

Решение

Вагон движется поступательно под действием веса $\overline{P}$, нормальной реакции $\overline{N}$ и силы сопротивления $\overline{F}$, которая направлена по наклонной плоскости вверх, противоположно движению вагона.

Сначала рассмотрим равномерное движение вагона по пути с углом наклона α.

Согласно уравнениям (96) будем иметь:

$$m\ddot{x}=mg\sin\alpha-F,$$
$$m\ddot{y}=mg\cos\alpha-N.$$

Так как вагон движется прямолинейно и равномерно, то $\ddot{x}=0$, $\ddot{y}=0$; поэтому $N=mg\cos\alpha$ и $F=mg\sin\alpha$.

Согласно условию $F=fN$, где f — коэффициент сопротивления. Следовательно, $mg\sin\alpha=fmg\cos\alpha$. откуда $f=\operatorname{tg}\alpha$. Теперь рассмотрим второй случай, когда вагон движется по участку пути с углом наклона β.

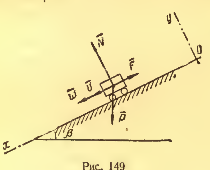


Рис. 149

Аналогично предыдущему, на основании уравнений (96) будем иметь (см. рис. 149):

$$m\ddot{x}=mg\sin\beta-F,$$
$$m\ddot{y}=-mg\cos\beta+N=0.$$

Так как ускорение w вагона параллельно оси x (рис. 149), то $w_y=\ddot{y}=0$; поэтому $N=mg\cos\beta$ и $F=fmg\cos\alpha$, следовательно, $m\ddot{x}=mg\sin\beta-fmg\cos\beta$, или, подставляя значение f и сокращая на m:

$$\ddot{x}=g(\sin\beta-\operatorname{tg}\alpha\ \cos\beta),\ \text{или}$$
$$\ddot{x}=\frac{g}{\cos\alpha}\sin(\beta-\alpha)=\text{const}.$$

Следовательно, вагон движется с постоянным ускорением $w=\frac{g}{\cos\alpha}\cdot\sin(\beta-\alpha)$, поэтому по формуле для пройденного пути при равномерно ускоренном движении без начальной скорости будем иметь:

$$x=\frac{wt^2}{2}=\frac{gt^2}{2\cos\alpha}\sin(\beta-\alpha).$$

Это и есть искомый закон движения вагона.

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к одной материальной точке, есть функция времени t.

Пример 105

На материальную точку, совершающую прямолинейное движение, действует сила $\overline{F}$, равномерно убывающая с течением времени и по истечении T *сек* обращающаяся в нуль. Какой скорости достигнет точка по истечении T *сек* и какой путь она пройдет за это время, если в начальный момент ($t=0$) скорость точки равна нулю, а ее ускорение равно $\overline{w}_0$ (рис. 150).

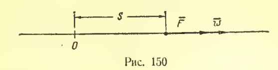


Рис. 150

Решение

Так как сила F, действующая на материальную точку, убывает равномерно с течением времени, то $F=F_0-at$, причем $a=\text{const}$.

В начальный момент ускорение точки равно w_0, поэтому $F_0=mw_0$; кроме того, при $t=T$ по условию $F=0$, а потому $F_0-aT=mw_0-aT=0$; отсюда

$$a=\frac{mw_0}{T} \text{ и } F=mw_0-\frac{mw_0}{T}t=mw_0\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

Следовательно, дифференциальное уравнение движения точки на основании равенства (94) запишется так:

$$\frac{mdv}{dt}=F=mw_0\left(1-\frac{t}{T}\right), \text{или } dv=w_0\left(1-\frac{t}{T}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $v_0=0$ до v и от 0 до t, имеем:

$$v=w_0\left(t-\frac{t^2}{2T}\right).$$

Так как $v=\frac{ds}{dt}$,

то

$$\frac{ds}{dt}=w_0\left(t-\frac{t^2}{2T}\right),$$

откуда

$$ds=w_0\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от 0 до s и от 0 до t, находим:

$$s = w_0 \int_0^t t\,dt - \frac{w_0}{2T} \int_0^t t^2 dt = \frac{w_0 t^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3T}\right).$$

Чтобы найти скорость v_1 и пройденный путь s_1 к моменту времени T, достаточно в предыдущих равенствах положить время t равным T *сек*.

Тогда будем иметь:

$$v_1 = w_0 \frac{T}{2} \text{ и } s_1 = \frac{w_0 T^2}{3}.$$

Третья группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, есть функция координаты этой точки.

Пример 106

Материальная точка M массой m движется прямолинейно по оси Ox. Точка отталкивается от неподвижного центра O силой F, пропорциональной массе m и расстоянию x, причем коэффициент пропорциональности равен $k=4$. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра O будет $x_0 = 5$ *м*, а начальная скорость $v_0 = 2$ *м/сек* (рис. 151).

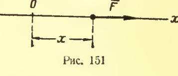


Рис. 151

Решение

По условию задачи $F = kmx$; поэтому дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = kmx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} - 4x = 0.$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и составим соответствующее характеристическое уравнение: $u^2 - 4 = 0$. Найдем его корни: $u_1 = 2$ и $u_2 = -2$.

Следовательно, общее решение выразится так:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим по начальным условиям движения. Для этого сначала найдем скорость точки, продифференцировав последнее уравнение по времени t:

$$v=\frac{dx}{dt}=2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}.$$

В начальный момент, при $t=0$, согласно условию, имеем:

$$x_0=5 \text{ и } v_0=2.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=5,\\ 2C_1-2C_2&=2,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1=3,\quad C_2=2;$$

таким образом,

$$x=3e^{2t}+2e^{-2t}.$$

Четвертая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, зависит от скорости этой точки, что имеет место при движении точки в сопротивляющейся среде.

Пример 107

Тело весом P падает с некоторой высоты без начальной скорости и испытывает сопротивление воздуха $F=\mu v^2$, где μ — коэффициент сопротивления, v — скорость тела. Определить скорость тела: 1) как функцию времени и 2) как функцию расстояния s (рис. 152).

Решение

Направим ось y по вертикали вниз и выберем начало координат в начальном положении тела. Тогда получим дифференциальное уравнение прямолинейного движения тела:

$$m\frac{dv}{dt}=P-\mu v^2=P\left(1-\frac{\mu}{P}v^2\right)=mg\left(1-\frac{\mu}{P}v^2\right).$$

Если c — скорость тела, при которой сила сопротивления воздуха равна весу тела, то $P=\mu c^2$, откуда $\frac{\mu}{P}=\frac{1}{c^2}$. Поэтому после сокращения на m получим

Рис. 152

$$\frac{dv}{dt}=g\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{g}{c^2}(c^2-v^2)$$

— уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dv}{c^2-v^2}=\frac{g}{c^2}dt.$$

Отсюда, интегрируя в соответствующих пределах и принимая

во внимание, что начальная скорость тела равна нулю, находим:

$$\int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}\int_0^t dt, \text{ или } \frac{1}{2c}\left|\ln\frac{c+v}{c-v}\right|_0^v = \frac{g}{c^2}t,$$

или

$$\ln\frac{c+v}{c-v} = \frac{2gt}{c}.$$

Отсюда

$$\frac{c+v}{c-v} = e^{\frac{2gt}{c}}.$$

Из этого уравнения находим:

$$v = \frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1}\, c.$$

Если умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части равенства, на $e^{-\frac{g}{c}\cdot t}$, то

$$\frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1} = \frac{e^{\frac{gt}{c}} - e^{-\frac{g}{c}t}}{e^{\frac{gt}{c}} + e^{-\frac{g}{c}t}}.$$

Но правая часть этого равенства есть гиперболический тангенс аргумента $\frac{gt}{c}$, поэтому $v = c\ \mathrm{th}\left(\frac{gt}{c}\right)$. Чтобы найти теперь скорость тела как функцию пройденного им расстояния s, исключим из дифференциального уравнения переменное t, для чего производную $\frac{dv}{dt}$ представим в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}.$$

Тогда получим следующее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2).$$

Разделив здесь переменные и интегрируя в соответствующих пределах, получим:

$$\int_0^v \frac{vdv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2}\int_0^s ds, \text{ или} -\frac{1}{2}\left|\ln(c^2 - v^2)\right|_0^v = \frac{g}{c^2}s,$$

или

$$\ln\frac{c^2 - v^2}{c^2} = -\frac{2g}{c^2}s.$$

Отсюда

$$\frac{c^2 - v^2}{c^2} = e^{-\frac{2g}{c^2}s}.$$

Из этого уравнения находим: $v^2 = c^2(1 - e^{-\frac{2g}{c^2}s})$ и

$$v = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{c^2}s}}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение свободной материальной точки, можно также разделить на четыре группы.

Первая группа

Задачи, в которых движение материальной точки происходит под действием постоянной силы.

Пример 108

Начальная скорость снаряда $v_0 = 490$ *м/сек*. Под каким углом α к горизонту следует бросить этот снаряд из начала координат, чтобы он попал в точку с координатами $y = 700$ *м*, $z = 680$ *м*?

Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Решение

Ось z направим по вертикали вверх, а ось y — по горизонтали так, чтобы начальная скорость снаряда лежала в плоскости Ozy.

Тогда, как известно (см. например, курс теоретической механики И. М. Воронкова, § 100), снаряд будет двигаться в вертикальной плоскости zOy, причем уравнения его движения имеют вид:

$$y = v_0 t \cos\alpha, \quad z = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая отсюда t, получаем уравнение траектории (параболы)

$$z = y \operatorname{tg}\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha},$$

или, заменяя $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ на $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, получаем

$$z = y \operatorname{tg}\alpha - \frac{gy^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha).$$

Подставляя сюда значения $y = 700$; $z = 680$; $g = 9{,}8$; $v_0 = 490$, получаем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 70\operatorname{tg}\alpha + 69 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = 69,$$

откуда,

$$\alpha_1 = 45°;\ \alpha_2 = 89°.$$

Пример 109

Частица M массой m, несущая заряд отрицательного электричества e, вступает в однородное электрическое поле постоянного напряжения E, имеющего горизонтальное направление, с вертикальной скоростью $\bar{v}_0$.

Определить дальнейшее движение частицы, зная, что в электрическом поле на нее действует сила $F = eE$, направленная в сторону, противоположную напряжению поля с учетом действия силы тяжести P (рис. 153).

Решение

За начало координат O возьмем начальное положение частицы, ось x направим по горизонтали в сторону, противоположную напряжению поля, а ось y — по вертикали вверх (рис. 153). Тогда проекции равнодействующей сил $\bar{P}$ и $\bar{F}$ на оси x и y будут равны:

$$X = F = eE = \text{const};\ Y = -P = -mg = \text{const}.$$

Дифференциальные уравнения движения частицы, согласно уравнениям (96), имеют вид:

$$m\ddot{x} = eE$$
$$m\ddot{y} = -mg,$$

или

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{eF}{m},$$
$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g.$$

Отсюда

$$d\dot{x} = \frac{eE}{m}dt;\ d\dot{y} = -g\,dt.$$

Интегрируя эти уравнения в соответствующих пределах, получаем:

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \int_0^t \frac{eE}{m}dt = \frac{eE}{m}\ t;\ \dot{y} - \dot{y}_0 = -\int_0^t g dt = -gt.$$

Но $\dot{x}_0 = v_{0x} = 0$ и $\dot{y}_0 = v_{0y} = v_0$, поэтому

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{eE}{m}t,\ \dot{y}=\frac{dy}{dt}=v_0-gt,$$

или

$$dx=\frac{eE}{m}t\,dt,\ dy=(v_0-gt)\,dt.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$x-x_0=\frac{eE}{m}\int_0^t t\,dt=\frac{eE}{2m}t^2;$$

$$y-y_0=v_0\int_0^t dt-g\int_0^t t\,dt=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Так как в начальный момент частица находится в начале координат, то $x_0=y_0=0$, и, следовательно,

$$x=\frac{eE}{2m}t^2,$$

$$y=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

Эти уравнения определяют движение частицы M. Предлагается читателю доказать, что проекция скорости частицы на прямую, перпендикулярную к равнодействующей сил $\overline{F}$ и $\overline{P}$, остается неизменной.

Вторая группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, а следовательно, и ее проекции на координатные оси, являются функциями времени. В этом случае

$$X=f_1(t);\ Y=f_2(t);\ Z=f_3(t),$$

причем функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — известны. Тогда дифференциальные уравнения движения точки имеют вид

$$m\ddot{x}=f_1(t),\ m\ddot{y}=f_2(t),\ m\ddot{z}=f_3(t).$$

Каждое из этих уравнений можно проинтегрировать в отдельности таким же способом, как и в задачах второй группы типа I.

Третья группа

Задачи, в которых равнодействующая всех сил, приложенных к данной материальной точке, зависит от положения этой точки, т. е. является функцией ее координат. Такой случай возможен, например, когда материальная точка притягивается к данному неподвижному центру или отталкивается от него силой, зависящей от расстояния точки до этого центра.

Пример 110

Материальная точка М массой m отталкивается от неподвижного центра O силой $\overline{F}=c\overline{r}$, где r — расстояние точки M от центра O, а c — постоянный коэффициент. В начальный момент расстояние $r_0=OM_0=a$, а скорость точки $\overline{v}_0$ — перпендикулярна к направлению $\overline{OM}_0$. Найти движение точки M и ее траекторию (рис. 154).

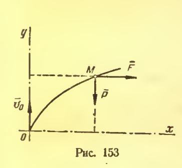


Рис. 153

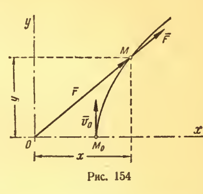


Рис. 154

Решение

Принимая центр O за начало координат, ось x направим по OM_0, как указано на рис. 154.

Так как $\overline{F}=c\overline{r}$, то проектируя обе части этого векторного равенства на оси Ox и Oy и учитывая, что $r_x=x$, $r_y=y$, где x и y — координаты движущейся точки, получаем:

$$F_x=cx,\ F_y=cy.$$

Дифференциальные уравнения движения точки M, согласно уравнениям (96), принимают вид:

$$m\ddot{x}=cx,$$
$$m\ddot{y}=cy,$$

или, полагая $\frac{c}{m}=k^2$,

$$\ddot{x}-k^2x=0,$$
$$\ddot{y}-k^2y=0.$$

Каждое из этих линейных уравнений можно проинтегрировать отдельно, для этого составим характеристическое уравнение $u^2-k^2=0$ и найдем его корни:

$$u_1=k,\ u_2=-k.$$

Следовательно, общее решение дифференциальных уравнений движения точки будет:

$$x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt},$$

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}.$$

Отсюда $\dot{x} = k(C_1 e^{kt} - C_2 e^{-kt})$

$$\dot{y} = k(C_3 e^{kt} - C_4 e^{-kt}).$$

Остается найти постоянные C_1, C_2, C_3, C_4. При $t=0$ имеем: $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = \dot{x}_0 = 0$, $v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0$. Подставляя эти значения в предыдущие уравнения, получаем:

$$x_0 = C_1 + C_2 = a; \quad \dot{x} = k(C_1 - C_2) = 0;$$
$$y_0 = C_3 + C_4 = 0; \quad \dot{y} = k(C_3 - C_4) = v_0.$$

Отсюда находим

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}, \quad C_3 = -C_4 = \frac{v_0}{2k}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}),$$
$$y = \frac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt}).$$

Эти уравнения определяют движение точки M. Чтобы найти ее траекторию, достаточно исключить параметр t. Для этого, полагая $\frac{v_0}{k} = b$, перепишем предыдущие уравнения в виде

$$\frac{x}{2} = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = \operatorname{ch}(kt),$$
$$\frac{y}{b} = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = \operatorname{sh}(kt).$$

Возведя теперь эти уравнения в квадрат и вычитая второе уравнение из первого, получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Траектория точки M есть гипербола.

Четвертая группа

Задачи, в которых рассматривается движение материальной точки под действием некоторой заданной силы (постоянной или переменной) в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления среды зависит от скорости материальной точки.

Пример 111

Точка M массой $m = 0{,}1\ \frac{Г \cdot сек^2}{см}$ движется под действием силы, которая притягивает ее к неподвижному центру O и пропорциональна расстоянию точки от этого центра, причем коэффи-

циент пропорциональности $c=0{,}6$ $\Gamma/см$. Движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости, причем коэффициент пропорциональности $\mu=0{,}5\frac{\Gamma\cdot сек}{см}$. Начальные условия: $x_0=0$, $y_0=30$ $см$, $v_{0x}=\dot{x}_0=20$ $см/сек$; $v_{0y}=\dot{y}_0=10$ $см/сек$. Найти кинематические уравнения движения точки (рис. 155).

Решение

Обозначим $\overline{F}$ силу, притягивающую точку M к центру O, и $\overline{F}'$ силу сопротивления среды, направленную противоположно скорости $\overline{v}$ точки M. Тогда

$$\overline{F}=-c\overline{r} \text{ и } \overline{F}'=-\mu\overline{v}.$$

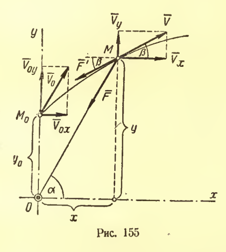


Рис. 155

Обозначая α и β углы, соответственно образуемые радиусом-вектором $\overline{r}$ точки M и вектором $\overline{v}$ скорости этой точки с осью x, составляем дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x}=X=-F\cos\alpha-F'\cos\beta=-cr\cos\alpha-\mu v\cos\beta;$$
$$m\ddot{y}=Y=-F\sin\alpha-F'\sin\beta=-cr\sin\alpha-\mu v\sin\beta;$$

но $r\cos\alpha=x$; $v\cos\beta=v_x=\dot{x}$; $r\sin\alpha=y$; $v\sin\beta=v_y=\dot{y}$. Поэтому

$$m\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx=0,$$
$$m\ddot{y}+\mu\dot{y}+cy=0.$$

Или после подстановки числовых значений

$$\ddot{x}+5\dot{x}+6x=0;\quad \ddot{y}+5\dot{y}+6y=0.$$

Дальнейшее решение задачи зависит от характера полученных дифференциальных уравнений. В данном случае имеются независимые друг от друга линейные дифференциальные уравнения второго порядка и для решения их можем воспользоваться теорией интегрирования таких уравнений, известной из курса математики. Составляем характеристическое уравнение, соответствующее первому уравнению:

$$u^2+5u+6=0,$$

отсюда

$$u_1=-2;\ u_2=-3.$$

Следовательно, общее решение данного дифференциального уравнения выразится так:

$$x=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}.$$

Совершенно аналогично для второго дифференциального уравнения получаем:

$$y=C_3e^{-2t}+C_4e^{-3t}.$$

Отсюда

$$\dot{x}=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t},\ \dot{y}=-2C_3e^{-2t}-3C_4e^{-3t}.$$

Подставляя начальные данные в найденные для x, y, $\dot{x}$ и $\dot{y}$ выражения

$$t_0=0;\ x_0=0;\ y_0=30;\ \dot{x}_0=20,\ \dot{y}_0=10,$$

имеем:

$$0=C_1+C_2;\qquad 20=-2C_1-3C_2;$$
$$30=C_3+C_4;\qquad 10=-2C_3-3C_4.$$

Отсюда: $C_1=20$; $C_2=-20$; $C_3=100$; $C_4=-70$.

Таким образом, окончательно получаем следующие кинематические уравнения движения точки:

$$x=20(e^{-2t}-e^{-3t});\ y=10(10e^{-2t}-7e^{-3t}).$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение *несвободной* материальной точки, можно разделить на две группы.

Первая группа

Задачи, в которых рассматривается криволинейное движение точки по заданной неподвижной линии.

В этом случае, поскольку траектория точки известна, проще воспользоваться дифференциальными уравнениями движения точки в естественной форме (98); при этом необходимо учесть реакции связей, т. е. нормальную реакцию и силу трения (если трение учитывается).

Пример 112

Материальная точка весом $P=196$ *Г*, лежащая на горизонтальной поверхности стола, привязана к неподвижной точке O нитью длиной $l=35$ *см*. Точке сообщена начальная скорость $v_0=4{,}9$ *м/сек*, перпендикулярная к направлению натянутой нити, вследствие чего точка описывает на столе окружность (рис. 156). Найти скорость точки и силу натяжения нити через 1 *сек* после начала движения, если коэффициент трения $f=0{,}25$.

Решение

К данной материальной точке приложены силы: вес $\overline{P}$, нормальная реакция стола $\overline{N}$, сила трения $F_{Tp}=fN$ и натяжение $\overline{T}$ нити.

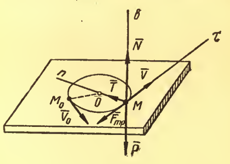


Рис. 156

Составляем уравнения движения точки в форме Эйлера (в проекциях на касательную, нормаль и бинормаль):

$$m\frac{dv}{dt}=-F_{\text{тр}}=-fN;\quad \frac{mv^2}{\rho}=T;\ 0=N-P.$$

Из последнего уравнения $N=P=mg$; следовательно, $m\frac{dv}{dt}=-fmg$, откуда $dv=-fgdt$ и $v=-fgt+C$. Так как $v=v_0$ при $t=0$, то $C=v_0$; поэтому $v=v_0-fgt$. При $t=1$ и при числовых данных задачи имеем: $v=4{,}9-0{,}25\cdot 9{,}8=2{,}45$ *м/сек*.

Из второго уравнения Эйлера, учитывая, что $\rho=l=0{,}35$ *м*, находим натяжение нити в момент $t=1$ *сек*:

$$T=\frac{mv^2}{l}=\frac{Pv^2}{gl}=\frac{196\cdot 2{,}45^2}{0{,}35\cdot 9{,}8}=343\ Г.$$

Ко второй группе относятся задачи, в которых рассматривается криволинейное движение точки *по данной неподвижной поверхности.*

В этих задачах следует составлять дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме, учитывая при этом

кроме равнодействующей $\overline{F}$ заданных сил, приложенных к движущейся точке, нормальную реакцию $\overline{N}$ поверхности и силу трения $\overline{F}_{Tp}$. Поэтому дифференциальные уравнения движения точки имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x + N_x + F_{Tpx};\ m\ddot{y} = F_y + N_y + F_{Tpy},$$
$$m\ddot{z} = F_z + N_z + F_{Tpz}\ldots \tag{103}$$

Если к этим уравнениям присоединить уравнение Кулона $F_{Tp} = fN$, где f — коэффициент трения, и уравнение связи,

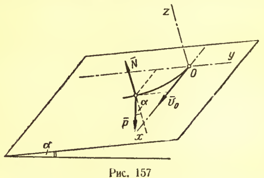


Рис. 157

т. е. уравнение поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$, по которой перемещается точка, то получим систему пяти уравнений, из которых можно определить все пять искомых величин: x, y, z, N и F_{Tp}. Если трение отсутствует, то последние члены в правых частях уравнений (103), понятно, исчезают.

Пример 113

Материальная точка M движется по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α, под действием собственного веса $\overline{P}$; ее начальная горизонтальная скорость $\overline{v}_0$ перпендикулярна к линии наибольшего ската этой плоскости. Определить движение этой точки и ее траекторию, а также реакцию наклонной плоскости (рис. 157).

Решение

Начало координат выберем в начальном положении материальной точки, а оси x и y — лежащими в наклонной плоскости, причем ось x — горизонтальна, а ось y — параллельна линии наибольшего ската; ось z направим по нормали наклонной плоскости. Так как на точку M действуют сила тяжести $\overline{P}$, направленная по вертикали вниз, и реакция наклонной плоскости $\overline{N}$, перпендикулярная к этой плоскости, то дифференциальные уравнения движения точки запишутся так:

$$m\ddot{x} = X = 0,$$
$$m\ddot{y} = Y = -P\sin\alpha = -mg\sin\alpha,$$
$$m\ddot{z} = Z = N - P\cos\alpha.$$

Так как точка M движется в плоскости xOy, то получим $z = 0$ (уравнение связи) и, следовательно, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$; поэтому $N - P\cos\alpha = 0$, откуда $N = P\cos\alpha$.

Остается проинтегрировать первые два уравнения, которые перепишем в виде:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g\sin\alpha.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\dot{x} = \text{const} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} - \dot{y}_0 = -gt\cdot\sin\alpha.$$

Но

$$\dot{x}_0 = v_{ox} = v_0, \quad \dot{y}_0 = v_{oy} = 0,$$

а потому

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -gt\sin\alpha.$$

Отсюда, интегрируя и принимая во внимание, что $x_0 = y_0 = 0$, находим $x = v_0 t$, $y = -\frac{gt^2}{2}\sin\alpha$. Эти уравнения определяют движение точки M по наклонной плоскости.

Исключая отсюда параметр t, находим траекторию этой точки

$$y = -\frac{g\sin\alpha}{2v_0^2}x^2,$$

— параболу, расположенную над осью Ox. Посмотрим теперь, как изменится решение этой задачи, если учесть силу трения между материальной точкой и наклонной плоскостью, равную $F_{Tp} = f\cdot N$,
где f — коэффициент трения.

Третье дифференциальное уравнение движения точки M (относящееся к оси z) остается, очевидно, без изменения; поэтому $N = P\cos\alpha$ и, следовательно, $F_{Tp} = fP\cos\alpha = \text{const}$. Так как сила трения направлена противоположно скорости $\bar{v}$, то

$$\bar{F}_{Tp} = -fP\cos\alpha\frac{\bar{v}}{v}.$$

Отсюда

$$F_{Tpx} = -fP\cos\alpha\frac{v_x}{v} = -fP\cos\alpha\frac{\dot{x}}{v},$$

$$F_{Tpy} = -fP\cos\alpha\frac{v_y}{v} = -fP\cos\alpha\frac{\dot{y}}{v}.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения движения точки M в плоскости xOy после сокращения на m имеют вид:

$$\ddot{x} = -fg\cos\alpha\frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -g\sin\alpha - fg\cos\alpha\frac{\dot{y}}{v}.$$

Точное интегрирование этих уравнений довольно сложно. Поэтому рассмотрим приближенное решение, предполагая, что начальная скорость $\bar{v}_0$, направленная по оси x, очень велика. Тогда при $\dot{x}_0 = v_0$ и $\dot{y}_0 = 0$ отношение $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ в течение не очень большого промежутка времени будет малой величиной.

Пренебрегая квадратом этой малой величины по сравнению с единицей, будем иметь:

$$\frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}} \approx 1; \quad \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} =$$

$$= \frac{\dot{y}}{\dot{x}\sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}} \approx \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Дифференциальные уравнения движения точки M принимают вид:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -fg\cos\alpha = \text{const}, \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = -$$

$$-g\sin\alpha - fg\cos\alpha\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Интегрируя первое из этих уравнений, находим:

$$\dot{x} = v_0 - fgt\cos\alpha \text{ и отсюда } x = v_0 t - f\cos\alpha\frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{v_0 - fgt\cos\alpha} = \frac{\dot{y}}{v_0}\,\frac{1}{1-\frac{fg\cos\alpha}{v_0}t}.$$

Заменяя с той же точностью $\frac{1}{1-\frac{fg\cos\alpha}{v_0}t}$ на $1+\frac{fg\cos\alpha}{v_0}t$, имеем

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \approx \frac{\dot{y}}{v_0}\left(1+\frac{fg\cos\alpha}{v_0}t\right),$$

или, пренебрегая малой величиной порядка $\frac{1}{v_0^2}$,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \approx \frac{\dot{y}}{v_0}.$$

Для определения $\dot{y}$ получаем теперь дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -g \sin\alpha - \frac{fg\cos\alpha}{v_0}\dot{y}.$$

Полагая для краткости $\frac{f\cos\alpha}{v_0} = k$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\dot{y}}{\sin\alpha + k\dot{y}} = -g\,dt.$$

Отсюда

$$\int_0^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\sin\alpha + k\dot{y}} = -g\int_0^t dt = -gt,$$

или

$$\frac{1}{k}\left|\ln(\sin\alpha + k\dot{y})\right|_0^{\dot{y}} = -gt,$$

или

$$\ln\frac{\sin\alpha + k\dot{y}}{\sin\alpha} = \ln\left(1 + \frac{k\dot{y}}{\sin\alpha}\right) = -kgt,$$

откуда

$$1 + \frac{k\dot{y}}{\sin\alpha} = e^{-kgt}$$

и $\dot{y} = -\frac{\sin\alpha}{k}(1 - e^{-kgt}) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}v_0(1 - e^{-kgt})$.

Интегрируя это уравнение и учитывая, что $y_0 = 0$, находим

$$y = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}v_0\int_0^t (1 - e^{-kgt})\,dt = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}v_0\left[t + \frac{1}{kg}(e^{-kgt} - 1)\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}v_0\left[\frac{1}{kg}(1 - e^{-kgt}) - t\right].$$

Итак, движение точки M по наклонной плоскости приближенно (пока gt мало по сравнению с v_0) определяется уравнениями:

$$x = v_0 t - \frac{fg\cos\alpha}{2}t^2,$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}v_0\left[\frac{1}{kg}(1 - e^{-kgt}) - t\right].$$

Классификация задач

Таблица 12

Группа	Типы задач I (прямолинейное движение материальной точки)	II (криволинейное движение свободной материальной точки)	III (криволинейное движение несвободной материальной точки)
1-я	Движение точки под действием постоянной силы (задачи 674, 675, 678, 679, 682, 686)	Движение точки под действием постоянной силы (задачи 709—719, 729)	Точка движется по заданной линии (задачи 820, 821)
2-я	Движение точки под действием силы, зависящей от времени (задачи 694, 698, 701, 702)	Движение точки под действием силы, зависящей от времени (задача 731)	Точка движется по заданной поверхности (задачи 816, 819, 822)
3-я	Движение точки под действием силы, зависящей от координаты точки (задачи 699, 700)	Движение точки под действием силы, зависящей от положения точки (задачи 724—728)	—
4-я	Движение точки под действием силы, зависящей от скорости (задачи 680, 683—685, 693, 695—697, 706—708)	Движение точки в сопротивляющейся среде (задачи 720—722, 730)	—

ГЛАВА II

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задачи, относящиеся к этой главе, можно разделить на следующие основные типы:

I. Гармонические свободные колебания;

II. Затухающие колебания;

III. Вынужденные колебания: а) при наличии сопротивления (задачи 853, 855, 856, 858, 859, 860); б) при отсутствии сопротивления (задачи 854, 857, 861).

§ 1. Свободные колебания

(задачи 825—842)

Пусть материальная точка M массой m движется прямолинейно под действием силы $\overline{F}$, притягивающей ее к неподвижному центру O и пропорциональной расстоянию движущейся точки от центра O. Следовательно, $F = c \cdot OM$,

где c — постоянный коэффициент пропорциональности. Силу $\overline{F}$ назовем восстанавливающей силой. Если выбрать за ось x прямолинейную траекторию точки M, поместив начало координат в точке O, то (рис. 158) дифференциальное уравнение движения точки M запишется так:

$$\frac{md^2x}{dt^2} = -cx,$$

где x — абсцисса точки; $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0$.

Обозначив $\frac{c}{m}$ через k^2, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad (104)$$

— линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Так как корни характеристического уравнения $u^2 + k^2 = 0$

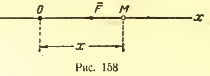


Рис. 158

являются мнимыми, то общий интеграл этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$x = A\cos(kt) + B\cdot\sin(kt), \qquad (105)$$

где A и B — произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям движения.

Если при $t = 0$ $x = x_0$, $v = v_0$, то $A = x_0$ и $B = \frac{v_0}{k}$; следовательно,

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt. \qquad (106)$$

Общий интеграл уравнения (104) можно представить и так:

$$x = a\cdot\sin(kt + \alpha), \qquad (107)$$

где a и α — постоянные, определяемые по начальным условиям движения при помощи следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \text{ — амплитуда колебаний,} \\ \alpha &= \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0} \text{ — начальная фаза.} \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Уравнение (107) есть уравнение гармонических колебаний с частотой k.

Период этих колебаний T определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (109)$$

Пример 114

Груз весом $P = 2$ *кГ* подвешен на пружине, которая в естественном состоянии имеет длину $l_0 = 40$ *см*.

Статическое удлинение пружины под действием этого груза равно 4 *см*. Груз приведен в положение M_0 и отпущен без начальной скорости.

Определить период колебаний груза и наибольшую силу натяжения пружины, если $AM_0 = 42$ *см* (рис. 158).

Решение

Ось x направим по вертикали вниз, а начало координат O выберем в положении равновесия груза, т. е. в том положении, где вес груза и реакция пружины уравновешиваются.

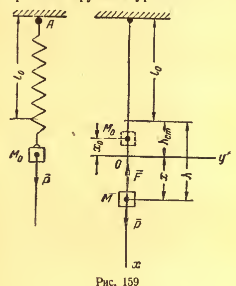


Рис. 159

Статическое удлинение пружины, соответствующее положению равновесия груза, обозначим λ_{cm}, а удлинение пружины, соответствующее положению M груза, обозначим λ. Тогда

$$\lambda = \lambda_{cm} + x.$$

Так как реакция пружины пропорциональна ее удлинению, то

$$F = c\lambda = c(\lambda_{cm} + x),$$

где c — постоянный коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью пружины.

В положении равновесия модуль силы F равен весу груза; поэтому

$$c\,\lambda_{cm}=F_{cm}=P,$$

откуда

$$c=\frac{P}{\lambda_{cm}}=\frac{2}{4}=0{,}5\ \text{кГ/см}.$$

Дифференциальное уравнение движения груза будет иметь следующий вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P-F \text{ или } m\frac{d^2x}{dt^2}=P-c(\lambda_{cm}+x).$$

$$\text{Но } P=c\,\lambda_{cm}, \text{ поэтому } m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$$

$$\text{или } \frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \text{ где } k^2=\frac{c}{m}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение (104) гармонических свободных колебаний.

Отсюда следует, что груз, подвешенный на пружине, будет совершать гармонические колебания около начала координат, т. е. около равновесного положения. Период этих колебаний найдем по формуле (109)

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

но $m=\frac{P}{g}$ и $c=\frac{P}{\lambda_{cm}}$, поэтому

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{4}{981}}\approx 0{,}4\ \text{сек}.$$

Амплитуду колебаний определяем по формуле (108)

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}.$$

По условию задачи $x_0=-2$ *см* и $v_0=0$, поэтому $a=2$ *см*. Следовательно,

$$\lambda_{max}=\lambda_{cm}+a=6\ \text{см}$$

и

$$F_{max}=c\,\lambda_{max}=0{,}5\cdot 6=3\ \text{кГ}.$$

Пример 115

К свободному концу A упругой горизонтальной балки, другой конец которой закреплен неподвижно, подвешен на пружине груз весом P. Упругая сила балки пропорциональна стреле прогиба f,

а сила натяжения пружины пропорциональна ее удлинению λ, причем жесткость балки равна c_1, а жесткость пружины равна c_2. Определить период колебаний груза, пренебрегая массами балки и пружины (рис. 160 *а*, *б*).

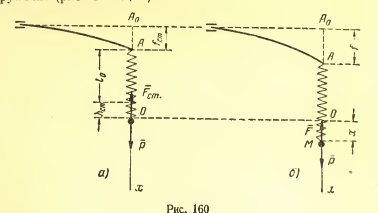


Рис. 160

Решение

Как и в предыдущей задаче, ось x направим по вертикали вниз, а начало координат O выберем в положении равновесия груза. Если статический прогиб балки, т. е. ее прогиб при равновесии груза, обозначим f_{cm}, естественную длину пружины обозначим l_0, а ее статическое удлинение λ_{cm}, то $A_0A = f_{cm}$ и $AO = l_0 + \lambda_{cm}$ (рис. 160).

Прогиб балки в некоторый момент t, когда груз занимает положение M, обозначим f. Длина пружины в этот момент, как видно из рис. 160*б*, будет $l = AM = A_0M - A_0A = A_0O + OM - A_0A = f_{cm} + l_0 + \lambda_{cm} + x - f$.
Следовательно, удлинение пружины $\lambda = l - l_0 = x - f + f_{cm} + \lambda_{cm}$.

К грузу M приложены две силы: вес $\overline{P}$ и реакция пружины $\overline{F}$, причем $F = c_2\lambda$. Если пренебречь массой пружины, то силы натяжения пружины на ее концах будут равны; следовательно, к концу A балки приложена сила, равная $c_2\lambda$. С другой стороны, если пренебречь массой балки, то приложенная к ней в точке A реакция пружины будет c_1f, а потому $c_1f = c_2\lambda$. Отсюда $f = \frac{c_2}{c_1}\lambda$ и, следовательно,

$$\lambda = x - \frac{c_2}{c_1}\lambda + f_{cm} + \lambda_{cm},$$

или

$$\frac{c_1 + c_2}{c_1}\lambda = x + f_{cm} + \lambda_{cm}.$$

В положении равновесия груза имеем:

$c_2\lambda_{cm}=c_1 f_{cm}=P$, откуда $f_{cm}=\frac{P}{c_1}$ и $\lambda_{cm}=\frac{P}{c_2}$;

поэтому

$$\frac{c_1+c_2}{c_1}\lambda=x+P\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)=x+\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}P,$$

отсюда

$$\lambda=\frac{c_1}{c_1+c_2}x+\frac{P}{c_2}.$$

Дифференциальное уравнение движения груза по оси x имеет вид: $m\frac{d^2x}{dt^2}=P-F=P-c_2\lambda$. Подставляя значение λ, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{c_1c_2}{(c_1+c_2)}x$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \text{ где } k^2=\frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}$$

— дифференциальное уравнение (104) гармонических колебаний с частотой k.

Отсюда следует, что искомый период колебаний груза

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1c_2}}$$

или

$$T=2\pi\sqrt{\frac{P}{g}\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)}=2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}+f_{cm}}{g}}.$$

§ 2. Затухающие колебания

(задачи 843 — 852)

Если материальная точка M массой m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы F, притягивающей эту точку к неподвижному центру O в *сопротивляющейся среде*,

Рис. 161

то на эту точку, кроме силы $\overline{F}$, действует еще сила сопротивления $\overline{R}$, пропорциональная скорости v точки M, т. е.

$$\overline{R}=-\mu\overline{v},$$

где μ — постоянный коэффициент пропорциональности (рис. 161). Тогда $R_x=-\mu v_x=-\mu\frac{dx}{dt}$ и дифференциальное уравнение дви-

жения точки под действием восстанавливающей силы в сопротивляющейся среде принимает вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения: $\frac{c}{m}=k^2$ и $\frac{\mu}{m}=2n$. Тогда будем иметь:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x+2n\frac{dx}{dt}=0. \qquad (110)$$

Если $k>n$, то движение точки является колебательным и общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x=e^{-nt}(A\cos k_1t+B\sin k_1t)=e^{-nt}\cdot a\sin(k_1t+\alpha), \qquad (111)$$

где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$.

Постоянные A и B (либо a и α) определяются по начальной скорости v_0 и начальной координате x_0 следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &A=x_0, \qquad B=\frac{v_0+nx_0}{k_1}\\ &\text{либо}\\ &a=\frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2x_0^2+(v_0+nx_0)^2},\\ &\alpha=\operatorname{arctg}\frac{k_1x_0}{v_0+nx_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Уравнение (111) есть уравнение затухающих колебаний. Период затухающих колебаний определяется по формуле

$$T=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}. \qquad (113)$$

Моменты времени, в которые точка получает максимальные отклонения от начала координат (положения равновесия), образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной полупериоду $\frac{T}{2}$. Амплитуды затухающих колебаний образуют убывающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой называется декрементом затухания и обозначается буквой D, причем

$$D=e^{-\frac{n\pi}{k_1}}=e^{-\frac{nT}{2}}. \qquad (114)$$

Величина $lnD=-\frac{nT}{2}$ называется логарифмическим декрементом.

Пример 116

Материальная точка совершает прямолинейные колебания в сопротивляющейся среде под действием силы, пропорциональной расстоянию от этой точки до неподвижного центра O.

Сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки. В начальный момент $x_0=0$ и $v_0=1 м/сек$. Зная, что период колебаний $T=2$ *сек*, а декремент затухания $D=\frac{1}{2}$, найти закон движения точки (рис. 161).

Решение

Выберем начало координат в неподвижном центре O; ось x направим по прямолинейной траектории точки, силу притяжения к центру O обозначим $\overline{F}$, а силу сопротивления среды — $\overline{R}$. Тогда $F_x=-cx$, $R_x=-\mu\frac{dx}{dt}$, где c и μ — постоянные коэффициенты; дифференциальное уравнение движения точки имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0,$$

где $2n=\frac{\mu}{m}$ и $k^2=\frac{c}{m}$, а m — масса точки.

Решение этого уравнения найдем по формулам (111) и (112):

$$x=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right)$$

или, подставив значения x_0 и v_0,

$$x=e^{-nt}\frac{1}{k_1}\sin k_1t.$$

Чтобы найти постоянные k_1 и n, воспользуемся формулами (113) и (114):

$$T=\frac{2\pi}{k_1}=2 \text{ сек} \quad \text{и} \quad D=e^{-\frac{nT}{2}}=\frac{1}{2},$$

отсюда $k_1=\pi$ и $e^{-n}=\frac{1}{2}$, или $n=\ln 2$.

Закон движения точки принимает вид:

$$x=\frac{e^{-t\ln 2}\cdot\sin\pi t}{\pi}, \text{ но } e^{-t\ln 2}=2^{-t},$$

поэтому

$$x=\frac{2^{-t}\sin\pi t}{\pi}.$$

§ 3. Вынужденные колебания

(задачи 853 — 861)

Если на материальную точку M, движущуюся по оси x, кроме силы F, пропорциональной расстоянию x, и силы R сопротивления среды, пропорциональной скорости v, действует

еще некоторая периодически изменяющаяся сила F', которую назовем возмущающей силой (рис. 162), то дифференциальное уравнение движения точки запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+cx=F'.$$

Пусть, например, возмущающая сила изменяется по закону $F'=H\cdot\sin(pt+\beta)$. Тогда, полагая $\frac{H}{m}=h$ и сохраняя обозначения, принятые в предыдущем параграфе, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\cdot\sin(pt+\beta). \qquad (115)$$

При $k>n_1$ общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x=a\cdot e^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)+b\cdot\sin(pt+\beta+\gamma), \qquad (116)$$

O $\bar{F}$ $\bar{R}$ M $\bar{v}$ $\bar{F'}$ x

x

Рис. 162

где

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{2np}{k^2-p^2}, \qquad (117)$$

$$b=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}.$$

Первый член правой части равенства (116) представляет собой затухающие колебания, а второй — так называемые вынужденные колебания.

Постоянные a и α определяются по начальным условиям движения. Если $k^2>2n^2$, то при

$$p=\sqrt{k^2-2n^2} \qquad (118)$$

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, равного

$$b_{max}=\frac{h}{2n\sqrt{k^2-n^2}}. \qquad (119)$$

При отсутствии сопротивления $R=0$, а следовательно, и $n=0$; дифференциальное уравнение движения точки принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\cdot\sin(pt+\beta). \qquad (120)$$

Полагая в равенствах (116) и (117) $n=0$, будем иметь его общее решение:

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + b \sin(pt + \beta), \text{ где } b = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad (121)$$

при $k \neq p$.

Первый член последнего равенства представляет собой свободные колебания, второй член — вынужденные.

Если частоты свободных и вынужденных колебаний совпадают, т. е. если $p = k$, то возникает *резонанс*, тогда решение уравнения (120) представляется в виде:

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2p} \cos(pt + \beta). \quad (122)$$

В этом случае амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает с возрастанием t.

Пример 117

Тело весом $P = 4{,}9$ *кГ*, погруженное в жидкость, подвешено на пружине, статическое удлинение которой под действием веса этого тела равно 1 *см*.

Свободный конец A пружины совершает вертикальные колебания около неподвижной точки A_0 по закону $y = A_0A = 0{,}05 \sin 5\pi t$, причем y выражен в метрах, t — в секундах.

Сила сопротивления жидкости при движении груза пропорциональна его скорости v и при $v = 1$ *м/сек* равна 1,57 *кГ*. Найти амплитуду вынужденных колебаний (рис. 163).

Рис. 163

Решение

Выберем начало координат O в положении равновесия тела, предполагая при этом, что конец A пружины закреплен в точке A_0; тогда $A_0O = l_0 + \lambda_{cm}$, где l_0 — длина недеформированной пружины и λ_{cm} — ее статическое удлинение.

Ось y направим по вертикали вниз. В некоторый момент t, когда тело занимает положение M, длина пружины $l = l_0 + \lambda_{cm} + y - A_0A$, а ее удлинение

$$\lambda = l - l_0 = \lambda_{cm} + y - A_0A = \lambda_{cm} + y - 0{,}05 \sin 5\pi t.$$

Если жесткость пружины обозначим c, то реакция пружины $F = c\lambda = c\lambda_{cm} + cy - 0{,}05c \sin 5\pi t$;

но $c\lambda_{cm} = P$, поэтому $F = P + cy - 0{,}05c \sin 5\pi t$.

Сила сопротивления жидкости $\overline{R}=-\mu\overline{v}$, где μ — коэффициент пропорциональности, $\overline{v}$ — скорость тела.

Дифференциальное уравнение движения тела имеет вид:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=P-F-\mu\frac{dy}{dt}=-cy+0{,}05c\sin 5\pi t-\mu\frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dy}{dt}+k^2y=h\sin 5\pi t,$$

где $2n=\frac{\mu}{m}$, $k^2=\frac{c}{m}$ и $h=\frac{0{,}05c}{m}=0{,}05\,k^2$.

Мы получим дифференциальное уравнение (115), в котором нужно положить $p=5\pi$ и $\beta=0$. Поэтому искомую амплитуду вынужденных колебаний находим по формуле (117).

$$b=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}=\frac{0{,}05k^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}};$$

разделив числитель и знаменатель на k^2, получим:

$$b=\frac{0{,}05}{\sqrt{\left(1-\frac{p^2}{k^2}\right)^2+4\frac{n^2}{k^2}\frac{p^2}{k^2}}}.$$

Подставим числовые значения входящих сюда величин:

$$m=\frac{P}{g}=\frac{4{,}9}{9{,}8}=\frac{1}{2}\,\frac{кГ\cdot сек^2}{м},\ \mu=1{,}57\,\frac{кГ\cdot сек}{м};\ n=\frac{\mu}{2m}=1{,}57;$$

$$c=\frac{P}{\lambda_{cm}}=\frac{4{,}9}{0{,}01}=490\,\frac{кГ}{м},\ \ k^2=\frac{c}{m}=980,\ p=5\pi,\ \frac{p^2}{k^2}=\frac{25\pi^2}{980}=\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$b=\frac{0{,}05}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{(1{,}57)^2}{980}}}\,м\approx 6{,}7\ \ см.$$

Пример 118

Материальная точка массой $m=2$ совершает прямолинейные колебания по оси Ox под действием возмущающей силы $F'=4\cos t$

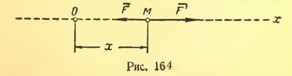


Рис. 164

и силы притяжения $\overline{F}$ к началу координат O, пропорциональной расстоянию точки от начала координат, причем коэффициент пропорциональности $c=8$. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x_0=0$ и $v_0=0$ (рис. 164).

Решение

Дифференциальное уравнение движения материальной точки

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=-8x+4\cos t$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=2\cos t=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

— дифференциальное уравнение (120), в котором нужно положить $k^2=4$, т. е. $k=2$, $h=2$, $p=-1$ и $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Его общее решение находим по формуле (121):

$$x=a\sin(kt+\alpha)+b\sin(pt+\beta)=a\sin(2t+\alpha)+$$
$$+b\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=a\sin(2t+\alpha)+b\cos t,$$

где $b=\frac{h}{k^2-p^2}=\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$x=a\sin(2t+\alpha)+\frac{2}{3}\cos t.$$

Дифференцируя это уравнение по t, находим скорость точки:

$$v=\frac{dx}{dt}=2a\cos(2t+\alpha)-\frac{2}{3}\sin t.$$

Находим постоянные a и α. Так как в начальный момент (при $t=0$) по условию задачи $x=x_0=0$ и $v=v_0=0$, то $a\sin\alpha+$ $+\frac{2}{3}=0{,}2\,a\cos\alpha=0$.

Отсюда

$$\cos\alpha=0,\ \text{т. е.}\ \alpha=\frac{\pi}{2}\ \text{и}\ a=-\frac{2}{3}.$$

Следовательно, искомый закон движения точки

$$x=-\frac{2}{3}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{3}\cos t=\frac{2}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

Пример 119

Точка массой $m=0{,}5$ *г* движется прямолинейно, притягиваясь к неподвижному центру O силой, пропорциональной расстоянию точки от этого центра, причем коэффициент пропорциональности $c=2$ *дн/см*. Кроме того, на точку действует возмущающая сила $F'=2\sin 2t$, выраженная в динах. Найти закон движения точки, если в начальный момент $x_0=0$ и $v_0=1$ *см/сек* (рис. 164).

Решение

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки, выбрав начало координат в центре O и направив

ось Ox по траектории точки:

$$0{,}5\,\frac{d^2x}{dt^2} = -2x + 2\sin 2t, \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4\sin 2t.$$

Мы получили дифференциальное уравнение (120), в котором

$$k^2 = 4,\ h = 4,\ p = 2,\ \beta = 0.$$

Так как частота свободных колебаний $k = 2$ и частота вынужденных колебаний $p = 2$ совпадают, то возникает резонанс; поэтому закон движения точки найдем по формуле (122)

$$x = a\cdot\sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k}\cos(kt + \beta) = a\cdot\sin(2t + \alpha) - t\cos 2t.$$

Постоянные a и α найдем по начальным условиям движения; продифференцировав предварительно последнее равенство по времени t, получим:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2a\cos(2t + \alpha) + 2t\cdot\sin 2t - \cos 2t.$$

Так как при $t_0 = 0$ имеем $x_0 = 0$ и $v_0 = 1$, то $x_0 = a\sin\alpha = 0$ и $v_0 = 2a\cos\alpha - 1 = 1$, откуда $\alpha = 0$ и $a = 1$; следовательно,

$$x = \sin 2t - t\cos 2t.$$

ГЛАВА III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

§ 1. Теорема о количестве движения

Теорему о количестве движения материальной точки можно выразить в векторной или в скалярной форме.

В векторной форме теорему о количестве движения можно выразить двумя способами:

а) дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы, действующей на эту точку:

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}\,dt = d\bar{S}; \tag{123}$$

б) изменение количества движения материальной точки за некоторый конечный промежуток времени $t - t_0$ равно полному импульсу действующей силы за тот же промежуток времени:

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\,dt = \bar{S}. \tag{124}$$

Скалярное выражение теоремы о количестве движения в дифференциальной или конечной форме получаем, проектируя век-

торное равенство (123) или векторное равенство (124) на какую-либо из неподвижных координатных осей:

$$d(mv_x) = Xdt = dS_x, \tag{125}$$

$$mv_x - mv_{x_0} = \int_{t_0}^{t} Xdt = S_x. \tag{126}$$

В случае движения материальной точки по прямой линии, которую примем за ось x, будем иметь (рис. 165):

$$d(mv) = Xdt \tag{127}$$

$$\text{и } mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} Xdt, \tag{128}$$

где v — алгебраическое значение скорости, $X = \pm F$, причем F — равнодействующая всех сил, приложенных к точке. Задачи этого параграфа можно разделить на три основных типа:

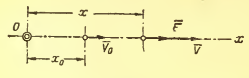


Рис. 165

I. задачи, относящиеся к прямолинейному движению точки, в которых требуется определить или скорость точки или время движения;

II. задачи, относящиеся к криволинейному движению точки, в которых требуется определить ее скорость или время движения;

III. задачи, в которых по заданному изменению количества движения материальной точки требуется определить импульс действующей на нее силы.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Задачи этого типа можно разделить на три группы:

1) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), постоянна;

2) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), есть функция времени.

3) задачи, в которых сила, приложенная к материальной точке (или равнодействующая всех приложенных сил), есть функция скорости этой точки.

Движение точки происходит под действием постоянной силы, т. е. $X = \pm F = \text{const}$. В этом случае можно применить теорему о количестве движения в конечной или интегральной форме (124), причем отсчет времени здесь можно вести от нуля:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} X dt = X t = \pm F t. \qquad (129)$$

Отсюда нетрудно найти v и затем закон равномерно-переменного движения точки, или, если v известно, найти t.

Применяя теорему о количестве движения к прямолинейному движению точки, ось x удобнее всегда направлять в сторону начальной скорости точки, а если начальная скорость равна нулю, то — в сторону силы, действующей на точку.

Пример 120

Вагонетка, вес которой вместе с полезной нагрузкой $P = 850$ *кГ*, при движении по горизонтальному пути испытывает сопротивление, величина которого составляет 0,01 от всех вертикальных нагрузок. Рабочий толкает вагонетку с силой $F = 17$ *кГ* (рис. 166).

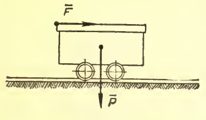


Рис. 166

Через сколько времени рабочий сообщит вагонетке скорость $v = 0,6$ *м/сек*?

Решение

На вагонетку действуют: 1) вертикальная сила тяжести $P = 850$ *кГ*, 2) нормальная реакция $\bar{N}$ рельсов, 3) горизонтальная сила $F = 17$ *кГ*, с которой рабочий толкает вагонетку, 4) горизонтальная сила сопротивления

$$F' = 0,01 P.$$

В данной задаче имеется не материальная точка, а система тел (кузов вагонетки, полезная нагрузка, колесные скаты), которые связаны друг с другом. Пренебрегая вращательным движением скатов, можно считать, что все части рассматриваемой системы движутся поступательно вместе с кузовом вагонетки. При этом можно считать, что масса вагонетки сосредоточена в центре ее тяжести и в центре тяжести приложена равнодействующая всех сил, действующих на вагонетку (справедливость этих допущений доказывается в динамике системы).

Таким образом, данная задача о движении системы сводится к задаче о движении материальной точки (центра тяжести вагонетки), на которую действует сила

$$\overline{R}=\overline{P}+\overline{F}+\overline{N}+\overline{F'}.$$

Обозначая проекцию силы R на направление движения вагонетки через X, имеем:

$$X=F-F'=F-0{,}01\ P=17-8{,}5=8{,}5\ \kappa\Gamma=\text{const}.$$

Теперь применяем теорему о количестве движения:

$$mv-mv_0=Xt,$$

откуда, учитывая, что $v_0=0$ и что $m=\frac{P}{g}$, находим:

$$t=\frac{m\cdot v}{X}=\frac{Pv}{gX}=\frac{850\cdot 0{,}6}{9{,}8\cdot 8{,}5}=61\ \textit{сек}.$$

Вторая группа

Движение точки происходит под действием силы, которая является функцией времени, т. е. $X=\pm F=f(t)$. В этом случае теорему о количестве движения тоже применяют в конечной форме, но *отсчет времени здесь не всегда можно вести от нуля*. В общем случае имеем:

$$mv-mv_0=\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt=\varphi(t),$$

отсюда находим скорость:

$$v=v_0+\frac{1}{m}\varphi(t).$$

Пример 121

На тело весом $P=20\ \kappa\Gamma$, находящееся в покое на горизонтальной плоскости, действует вертикальная сила F, возрастающая от нуля пропорционально времени, причем коэффициент пропорциональности равен $2\ \kappa\Gamma/сек$ (рис. 167). Через сколько времени после начала действия силы F тело начинает двигаться? Найти закон этого движения.

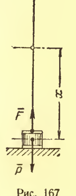


Рис. 167

Решение

На тело, пока оно находится в покое, действуют три силы: сила тяжести $P=20\ \kappa\Gamma$, сила $F=2t$ и нормальная реакция N плоскости AB. В момент начала движения сила N, очевидно,

обращается в нуль и с этого момента на тело действуют только две силы: $\overline{F}$ и $\overline{P}$. Проекция равнодействующей сил, приложенных к телу с момента начала движения, на ось x, по которой будет двигаться центр тяжести тела, выразится так:

$$X = F - P = 2t - 20 = 2(t - 10).$$

Это выражение для X справедливо только с момента $t = 10$ *сек*, когда движущая сила F станет равна силе тяжести P, ибо до этого момента на тело действует, как мы уже отмечали, еще третья сила $\overline{N}$.

Так как в данном случае $X = f(t)$, то для решения задачи можно применить теорему о количестве движения в конечной форме (128). Учитывая, что $m = \frac{P}{g} = \frac{20}{9,8} = \frac{10}{4,9}$ и $v_0 = 0$, имеем

$$\frac{10}{4,9}v = \int_{10}^{t} X dt = \int_{10}^{t} 2(t - 10)\, dt = \left| (t - 10)^2 \right|_{10}^{t} = (t - 10)^2,$$

откуда $v = 0,49\,(t - 10)^2$, но $v = \frac{dx}{dt}$, следовательно, $dx = 0,49\,(t - 10)^2\, dt$.

Выбирая начало координат в начальном положении центра тяжести тела, т. е. полагая $x_0 = 0$, получаем:

$$x = \int_{10}^{t} 0,49\,(t - 10)^2\, dt = 0,49 \cdot \left| \frac{(t - 10)^3}{3} \right|_{10}^{t} = 0,163\,(t - 10)^3.$$

Итак, движение начинается через 10 *сек* после начала действия силы $\overline{F}$, причем $x = 0,163\,(t - 10)^3$. Заметим, что полученное уравнение справедливо только с мотента $t = 10$ *сек*.

Третья группа

Движение точки происходит под действием силы, зависящей от скорости, т. е. $X = \pm F = f(v)$. В этом случае теорему о количестве движения следует применить в дифференциальной форме (127):

$$d(mv) = X dt = f(v)\, dt$$

$$\text{или } m\frac{dv}{f(v)} = dt,$$

отсюда находим время:

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)} = m\varphi(v).$$

Если в задаче требуется определить скорость, то это уравнение нужно разрешить относительно v.

Пример 122

В тот момент, когда скорость моторного судна равна v_0, выключается мотор, и судно движется, испытывая сопротивление воды, величина которого пропорциональна скорости, причем коэф-

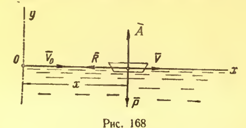


Рис. 168

фициент пропорциональности равен μ; масса судна равна m. Через какой промежуток времени скорость судна уменьшится вдвое? (рис. 168).

Решение

Вес судна P уравновешивается архимедовой силой A. В горизонтальном направлении действует одна только сила сопротивления воды $\bar{R}$, направленная в сторону, противоположную скорости судна. Направляя ось x в сторону движения, имеем: $X = -\mu \cdot v$, т. е. X является функцией от v. Поэтому применяем теорему о количестве движения в дифференциальной форме (127):

$$d(mv) = Xdt = -\mu v dt.$$

Разделяя переменные, получим: $\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} dt$.

Теперь интегрируем в соответствующих пределах:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt,$$

откуда $(\ln v) \big|_{v_0}^{v} = -\frac{\mu}{m} t$, или $\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t$,

или $\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t$. Отсюда находим:

$$t = -\frac{m}{\mu} \ln \frac{v}{v_0} = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{v} = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{0{,}5\, v_0} = \frac{m}{\mu} \ln 2.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Задачи этого типа, в которых рассматривается криволинейное движение точки и требуется найти скорость точки или время движения, можно разделить на такие же три группы, как и задачи первого типа:

1) движение происходит под действием постоянной силы;

2) движение происходит под действием силы, зависящей от времени;

3) движение происходит под действием постоянной силы в среде, сопротивление которой пропорционально *первой* степени скорости.

В этих трех случаях теорема о количестве движения дает первые интегралы дифференциальных уравнений движения. В первом и во втором случаях, т. е. когда сила постоянна или является функцией времени, теорема применяется в *конечной* форме, выражаемой уравнениями (126). Из уравнений (126) по заданным проекциям силы находят проекции скорости на координатные оси:

$$v_x = v_{ox} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} X dt; \quad v_y = v_{oy} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} Y dt;$$

$$v_z = v_{oz} + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} Z dt.$$

Первая группа

Так как в этом случае сила $\overline{F} = \text{const}$, то и ее проекции на координатные оси x, y, z постоянны. Поэтому теорему о количестве движения можно применять в конечной форме (126).

Следовательно, будем иметь:

$$mv_x - mv_{ox} = Xt, \quad mv_y - mv_{oy} = Yt, \quad mv_z - mv_{oz} = Zt.$$

Из этих уравнений определяются проекции скорости, а затем и скорость $\overline{v}$.

Пример 123

Определить, пользуясь теоремой о количестве движения, время, в течение которого тело, брошенное под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью v_0, достигает максимальной высоты (рис. 169).

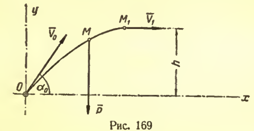


Рис. 169

Решение

Координатные оси располагаем в плоскости движения тела, причем ось x направляем горизонтально, а ось y — вертикально

вверх. Составим уравнение, выражающее изменение проекции количества движения на ось y:

$$mv_{1y} - mv_{0y} = S_y = -\int_0^{t_1} P dt = -mg\int_0^{t_1} dt = -mgt_1,$$

но $v_{1y} = 0$ (в наивысшей точке скорость тела горизонтальна), и $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha_0$, а потому $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$.

Вторая группа

В этом случае сила $\overline{F}$, а следовательно, и ее проекции на координатные оси являются известными функциями времени, т. е.

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t).$$

Теорема о количестве движения применяется здесь в конечной форме (126). Следовательно, будем иметь:

$$mv_x - mv_{0x} = \int_{t_0}^{t} f_1(t)\,dt;$$

$$mv_y - mv_{0y} = \int_{t_0}^{t} f_2(t)\,dt;$$

$$mv_z - mv_{0z} = \int_{t_0}^{t} f_3(t)\,dt.$$

Выполняя интегрирование, находим из этих уравнений проекции скорости, а затем и скорость $\overline{v}$.

Пример 124

На материальную точку массой $m = 2$ т. е. м. действует сила, проекции которой на координатные оси равны

$$X = 6\cos 2t;$$
$$Y = 6\sin 2t;$$
$$Z = -6\sin 2t;$$

(сила выражена в *кГ*, время t — в *сек*).

Определить скорость $\overline{v}_2$ точки в момент $t_2 = \pi = 3{,}14$ *сек*, если в момент $t_1 = \frac{\pi}{2}$ *сек* ее скорость $\overline{v}_1$ равна по модулю 2 *м/сек* и составляет с координатными осями x, y, z углы, равные соответственно 30°, 60° и 90°.

Решение

Так как проекции силы на координатные оси являются функциями времени, то теорему о количестве движения можно применить в конечной форме (126). Для этого вычислим сначала проекции на координатные оси импульса действующей силы за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2:

$$S_x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} X dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2t)\, dt = 3 \left| \sin 2t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0,$$

$$S_y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Y dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t)\, dt = -3 \left| \cos 2t \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -6 \text{ кг} \cdot \text{сек}.$$

Так как Z отличается от Y только знаком, то $S_z = 6$ $кГ \cdot сек$. Далее на основании уравнений (126) получаем:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = S_x = 0,$$
$$mv_{2y} - mv_{1y} = S_y = -6,$$
$$mv_{2z} - mv_{1z} = S_z = 6.$$

Отсюда при $m = 2$ находим проекции искомой скорости

$$v_{2x} = v_{1x},$$
$$v_{2y} = v_{1y} - 3,$$
$$v_{2z} = v_{1z} + 3.$$

Так как $v_{1x} = v_1 \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$,
$v_{1y} = v_1 \cdot \cos 60° = 1$,
$v_{1z} = v_1 \cdot \cos 90° = 0$, то
$v_{2x} = \sqrt{3}$,
$v_{2y} = -2$,
$v_{2z} = 3$.

Следовательно, $v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{16} = 4 \frac{м}{сек}$.

Если углы вектора $\bar{v}_2$ с координатными осями обозначим α, β, γ, то $\cos\alpha = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}4330$;

$$\cos\beta = \frac{v_{2y}}{v_2} = -0{,}5;$$
$$\cos\gamma = \frac{v_{2z}}{v_2} = 0{,}75.$$

Отсюда $\alpha = 64°30'$, $\beta = 120°$, $\gamma = 48°30'$.

Третья группа

В этом случае проекции силы на каждую из трех координатных осей являются линейной функцией проекции скорости на ту же ось, и теорему о проекции количества движения применяют в дифференциальной форме:

$$d(mv_x) = Xdt; \quad d(mv_y) = Ydt; \quad d(mv_z) = Zdt.$$

Прежде чем интегрировать эти дифференциальные уравнения, надо переменные разделить, для чего достаточно эти уравнения разделить соответственно на X, Y, Z; последующее решение будет аналогично решению в случае прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей от скорости.

Пример 125

Решить пример 123, учитывая сопротивление воздуха, величина которого выражается формулой:

$$R = kP\cdot v,$$

где k — постоянный коэффициент, P — вес тела и v — его скорость (рис. 170)

Решение

Координатные оси располагаем так же, как в примере 123 (см. рис. 170). Так как на тело действует сила, которая является функцией скорости, то теорему о проекции количества движения

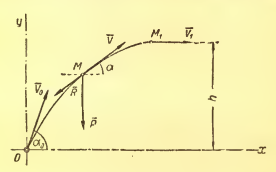


Рис. 170

на ось y применяем в дифференциальной форме:

$$d(mv_y) = Ydt;$$

но $Y = -P - R\sin\alpha = -P(1 + kv\sin\alpha) = -P(1 + kv_y)$. Следовательно, $mdv_y = -mg(1 + kv_y)\,dt$, откуда $dt = -\frac{dv_y}{g(1 + kv_y)}$.

Учитывая, что v_y изменяется в пределах от $v_0 \sin \alpha_0$ до нуля, имеем:

$$t_1 = -\int_{v_0 \sin \alpha_0}^{0} \frac{dv_y}{g(1+kv_y)} = \frac{1}{kg} \Big| \ln(1+kv_y) \Big|_0^{v_0 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{1}{kg} \ln(1 + kv_0 \sin \alpha_0).$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

В задачах этого типа известно количество движения точки в начальный и конечный момент, а следовательно, и его проекции на координатные оси. Проекции искомого импульса силы определяются по формулам (126), т. е.

$$S_x = mv_x - mv_{0x},$$
$$S_y = mv_y - mv_{0y},$$
$$S_z = mv_z - mv_{0z}.$$

По этим проекциям находятся модуль и направление импульса $\overline{S}$.

Пример 126

Материальная точка M перемещается по негладкому криволинейному желобу, расположенному в вертикальной плоскости xOy, под действием собственного веса $\overline{P}$. Угол трения равен φ. Начальная скорость этой точки, когда она занимает положение A, составляет с вертикальной осью Oy угол α и по модулю равна v_0, а ее конечная скорость в точке B направлена по горизонтальной оси Ox и по модулю равна v. Найти импульс нормальной реакции N желоба за промежуток времени t, в течение которого точка M переместилась из A в B (рис. 171).

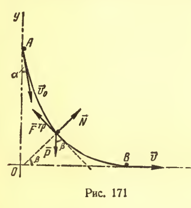


Рис. 171

Решение

Применим теорему о количестве движения материальной точки в форме (126):

$$m(v_x - v_{0x}) = \int_0^t X\,dt,$$

$$m(v_y - v_{0y}) = \int_0^t Y\,dt.$$

Здесь X и Y — проекции на оси x и y равнодействующей всех сил, приложенных к точке M, т. е. сил $\bar{P}$, $\bar{N}$ и силы трения $\bar{F}_{Tp}$. Поэтому

$$X = P_x + N_x + F_{Tpx} = N_x + F_{Tpx},$$
$$Y = P_y + N_y + F_{Tpy} = -P + N_y + F_{Tpy}.$$

Кроме того, имеем: $F_{Tp} = f \cdot N$, где
f — коэффициент трения, $f = \operatorname{tg} \varphi$,

$$v_x = v, \; v_y = 0, \; v_{0x} = v_0 \sin \alpha, \; v_{0y} = -v_0 \cos \alpha$$

Если угол силы $\bar{N}$ с осью x обозначим β, то $N_x = N \cos \beta$,

$$N_y = N \sin \beta, \; F_{Tpx} = -F_{Tp} \cdot \sin \beta = -fN \sin \beta = -fN_y,$$
$$F_{Tpy} = F_{Tp} \cdot \cos \beta = fN \cos \beta = f \cdot N_x.$$

Следовательно, уравнения (126) принимают вид:

$$m(v - v_0 \sin \alpha) = \int_0^t N_x dt - f \cdot \int_0^t N_y dt,$$

$$mv_0 \cos \alpha = \int_0^t N_y dt + f \int_0^t N_x dt - Pt.$$

Так как

$$\int_0^t N_x dt = S_x \text{ и } \int_0^t N_y dt = S_y,$$

где S_x, S_y — проекции искомого импульса $\bar{S}$ силы $\bar{N}$ на оси x и y, то:

$$S_x - fS_y = m(v - v_0 \sin \alpha),$$
$$fS_x + S_y = mv_0 \cos \alpha + Pt = m(v_0 \cos \alpha + gt).$$

Из этих уравнений можно найти S_x и S_y и затем по этим проекциям вычислить импульс S. Но проще возвести эти уравнения в квадрат и сложить их. Тогда получим:

$$(1 + f^2)(S_x^2 + S_y^2) = m^2[(v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2].$$

Отсюда, замечая, что $S_x^2 + S_y^2 = S^2$ и

$$1 + f^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

находим $S = m \cos \varphi \sqrt{(v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2} =$

$$= \frac{P \cos \varphi}{g} \sqrt{(v - v_0 \sin \alpha)^2 + (gt + v_0 \cos \alpha)^2}.$$

Таблица 13

Классификация задач

Типы	Группы		
	1-я	2-я	3-я
I Определение времени или скорости при прямолинейном движении точки	Постоянная сила (задачи 733, 734, 737, 743)	Сила, зависящая от времени (задачи 694, 698)	Сила, зависящая от скорости (задачи 687, 691, 696)
II Определение времени или скорости при криволинейном движении точки	Постоянная сила	Сила, зависящая от времени	Движение точки в сопротивляющейся среде
III Определение силы или ее импульса по изменению количества движения (задачи 735, 738, 739, 741, 743, 744)	—	—	—

§ 2. Теорема о моменте количества движения

Момент количества движения материальной точки относительно некоторого центра O выражается следующим образом:

$$\overline{m}_0(m\overline{v}) = \overline{r} \times m\overline{v}, \tag{130}$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор движущейся точки относительно центра O.

Очевидно, что модуль момента количества движения равен:

$$|\overline{m}_0(m\overline{v})| = mvh, \tag{131}$$

где h — плечо вектора $\overline{v}$ относительно центра O (рис. 172).

Проектируя векторное равенство (130) на координатные оси, проходящие через центр O, получаем формулы для моментов количества движения материальной точки относительно этих осей:

$$m_x(m\overline{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad m_y(m\overline{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z});$$
$$m_z(m\overline{v}) = x\dot{y} - y\dot{x}. \tag{132}$$

В векторной форме теорема о моменте количества движения выражается так: *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-*

либо неподвижного центра O равна моменту действующей силы относительно того же центра, т. е.

$$\frac{d}{dt}\overline{m}_0(m\overline{v})=\overline{m}_0(\overline{F}). \qquad (133)$$

Проектируя векторное равенство (133) на какую-либо из координатных осей, проходящих через центр O, получаем уравнение, выражающее ту же теорему в скалярной форме:

$$\frac{d}{dt}m_x(m\overline{v})=m_x(\overline{F}), \qquad (134)$$

т. е. *производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту действующей силы относительно той же*

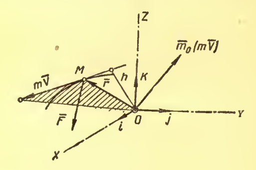


Рис. 172

оси. Эта теорема имеет большое значение при решении задач в случае движения точки под действием центральной силы. Центральной силой называется такая сила, линия действия которой все время проходит через одну и ту же неподвижную точку, называемую центром этой силы. Если материальная точка движется под действием центральной силы $\overline{F}$ с центром в точке O, то

$$\frac{d}{dt}\overline{m}_0(m\overline{v})=\overline{m}_0(\overline{F})=0$$

и, следовательно, $\overline{m}_0(m\overline{v})=\text{const}$. Таким образом, момент количества движения в данном случае остается постоянным по модулю и по направлению. Отсюда следует, что материальная точка под действием центральной силы описывает плоскую кривую, расположенную в плоскости, проходящей через центр силы.

Если известна траектория, которую описывает точка под действием центральной силы, то, пользуясь теоремой о моменте количества движения, можно найти эту силу как функцию расстояния r от точки до центра силы.

Действительно, так как момент количества движения относительно центра силы остается постоянным, то, обозначая h плечо вектора $m\bar{v}$ относительно центра силы, имеем:

$$vh = \text{const}. \qquad (135)$$

Для определения этой постоянной должна быть известна скорость точки в каком-либо месте траектории. С другой стороны, имеем (рис. 173):

$$F_n = F \sin\varphi = \frac{mv^2}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны траектории, а φ — угол между радиусом-вектором точки и касательной к траектории в этой точке. Отсюда

$$F = \frac{mv^2}{\rho \sin\varphi}. \qquad (136)$$

Итак, имеем два уравнения (135) и (136) с двумя неизвестными v и F; остальные величины, входящие в эти уравнения,

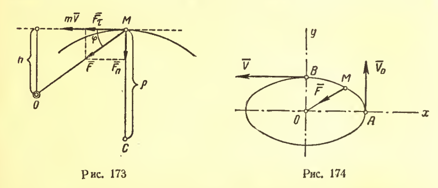


Рис. 173 Рис. 174

т. е. h, ρ и φ, являясь элементами заданной траектории, легко могут быть найдены. Таким образом, можно найти v и F как функции r.

Пример 127

Точка M описывает эллипс под действием центральной силы $\bar{F}$ (рис. 174). Скорость в вершине A равна $\bar{v}_0$. Найти скорость v в вершине B, если $OA = a$ и $OB = в$.

Решение

Так как в данном случае

$$m_0(m\bar{v}) = \text{const}, \text{ то } mvв = mv_0a, \text{ откуда } v = \frac{a}{в} v_0.$$

Пример 128

Точка M массой m описывает окружность радиусом a, притягиваясь точкой A этой окружности (рис. 175)

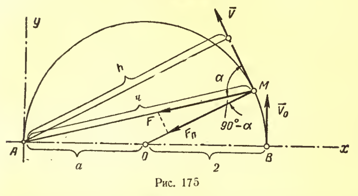


Рис. 175

В начальный момент точка находится в положении B и имеет скорость v_0. Определить скорость v точки и силу притяжения F как функции радиуса-вектора r.

Решение

Так как $\overline{m}_A(\overline{F})=0$, то $\overline{m}_A(m\overline{v})=\text{const}=\overline{m}_A(m\overline{v}_0)$; следовательно, $mvh=mv_0 2a$, откуда $v=v_0\frac{2a}{h}$. Но из рисунка имеем:

$$r=2a\cos(90°-\alpha)=2a\sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha=\frac{r}{2a}$, поэтому $h=r\sin\alpha=\frac{r^2}{2a}$, и, следовательно, $v=$ $=\frac{4a^2v_0}{r^2}$.

Силу F находим, пользуясь одним из естественных уравнений движения:

$$F_n=F\sin\alpha=\frac{mv^2}{\rho}=\frac{mv^2}{a},$$

отсюда

$$F=\frac{mv^2}{a\sin\alpha}=\frac{m}{a}\;\frac{16a^4v_0^2}{r^4}\;\frac{2a}{r}=\frac{32ma^4v_0^2}{r^5}.$$

§ 3. Работа и мощность

Работа силы — скалярная величина, характеризующая эффект действия силы в зависимости от пути, на протяжении которого эта сила действует. Работа dA силы на бесконечно малом перемещении ds, называемая ***элементарной работой***, выражается формулой

$$dA=F\cos\alpha\cdot ds, \tag{137}$$

где $ds = \breve{MM}_1$, α — угол между силой $\overline{F}$ и скоростью $\overline{v}$ точки ее приложения (рис. 176), или в виде скалярного произведения:

$$dA = \overline{F}\, d\overline{r}, \tag{138}$$

где $d\overline{r} = \overline{v}dt$ — дифференциал радиуса-вектора точки приложения силы.

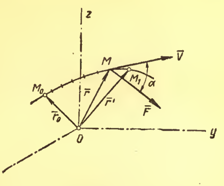


Рис. 176

Выражая это скалярное произведение через проекции векторов $\overline{F}$ и $d\overline{r}$ на координатные оси, получаем *аналитическое* выражение элементарной работы:

$$dA = X\,dx + Ydy + Zdz, \tag{139}$$

где X, Y, Z — проекции силы на координатные оси, а dx, dy, dz — бесконечно малые изменения (дифференциалы) координат точки приложения силы при элементарном перемещении этой точки.

Если сила F приложена к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, то

$$dA = m_z(\overline{F})\, d\varphi, \tag{140}$$

где $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела вокруг оси.

Особый интерес представляет случай, когда сила является функцией координат точки и, кроме того,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \tag{141}$$

В этом случае существует такая функция координат $U = U(x, y, z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям силы на соответствующие координатные оси, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \tag{142}$$

Такая функция называется *силовой*, или *потенциальной*, функцией. Таким образом, если существует силовая функция, то

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU, \tag{143}$$

т. е. *элементарная работа силы равна полному дифференциалу силовой функции.* Ограниченная или неограниченная часть пространства, где проявляется действие силы, имеющей силовую функцию, называется *силовым потенциальным полем*. Геометрическое место точек силового потенциального поля, в которых силовая функция сохраняет постоянное значение, называется *эквипотенциальной поверхностью, или поверхностью уровня.*

Работа A силы $\overline{F}$ на конечном пути определяется как предел суммы элементарных работ и выражается в виде криволинейного интеграла, взятого вдоль дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ траектории от точки M_0 до точки M:

$$A = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} F\cos\alpha\, ds = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} \overline{F}\, d\overline{r} = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{144}$$

Если произведение $F \cdot \cos\alpha$ выражается известной функцией дуговой координаты s точки приложения силы, то переменной интегрирования является эта величина s и формула для вычисления работы принимает вид:

$$A = \int\limits_{s_0}^{s} F\cos\alpha\, ds = \int\limits_{s_0}^{s} F_\tau ds, \tag{145}$$

где s_0 и s — значения дуговой координаты, соответствующие положениям M_0 и M точки приложения силы, а F_τ — проекция силы на касательную к траектории этой точки.

Если при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси момент приложенной к нему силы является функцией угла φ поворота тела, т. е.

$$m_z(\overline{F}) = f(\varphi),$$

то

$$A = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} m_z(\overline{F})\, d\varphi. \tag{146}$$

В частном случае, когда точка M движется по прямой под действием постоянной силы $\overline{F}$, направленной по той же прямой в сторону движения или против движения, то соответственно имеем:

$$A = +F\sigma, \text{ или } A = -F\sigma, \tag{147}$$

где σ — путь, пройденный точкой.

Если постоянная по модулю сила образует с прямой, по которой движется ее точка приложения, *постоянный* угол α, то

$$A = F\sigma\cos\alpha. \tag{148}$$

Работа силы, имеющей потенциальную функцию, на конечном перемещении выражается разностью значений этой функции в конечной и начальной точках пути:

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0, \tag{149}$$

т. е. *в этом случае работа силы не зависит от кривой, по которой перемещается точка M, а зависит лишь от начального и конечного ее положений.* При изучении движения материальной точки в силовом потенциальном поле весьма большое значение имеет понятие *потециальной энергии.* Потенциальная энергия материальной точки представляет собой особый вид энергии, которым обладает точка, находящаяся в силовом потенциальном поле. Потенциальная энергия Π равна работе, которую совершила бы сила поля при перемещении точки ее приложения из данного положения $M(x, y, z)$ в положение $M^{(0)}(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$, принятое за нулевое, т. е.

$$\Pi = U^{(0)} - U, \tag{150}$$

откуда

$$d\Pi = -dU. \tag{151}$$

Работа силы на конечном пути через потенциальную энергию выражается так:

$$A = \Pi_0 - \Pi. \tag{152}$$

Если на точку действует несколько сил, то работа равнодействующей этих сил на каком-либо пути равна сумме работ составляющих сил на том же пути.

В технической системе единиц работа измеряется в килограммометрах (*кГм*). В физической системе единицей работы является 1 *эрг* = 1 *дина·см* = 1 *г·см²·сек⁻²* или 1 *джоуль* = 10^7 *эргов.*

Мощность N характеризует быстроту, с которой совершается работа, и в общем случае определяется как производная от работы по времени

$$N = \frac{dA}{dt} = \bar{F}\,\bar{v} = F\cos\alpha\, v. \tag{153}$$

Если работа A производится равномерно, то мощность определяется так:

$$N = \frac{A}{t}, \tag{154}$$

где t — время, в течение которого произведена работа.

Таким образом, в этом частном случае мощность численно равна работе, производимой в единицу времени.

При вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$N = M_z \omega, \tag{155}$$

где $M_z = \sum m_z(\bar{F})$ — главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения и ω — угловая скорость тела.

В технической системе единиц мощность измеряется в *кГм/сек*.

В технике мощность часто выражают в лошадиных силах (*л. с.*) или киловаттах (*квт*), причем

$$1 \text{ л. с.} = 75 \text{ кГм/сек}, \quad 1 \text{ квт} = 102 \text{ кГм/сек}. \tag{156}$$

При решении задач на вычисление работы и мощности часто используют *коэффициент полезного действия*. Коэффициентом полезного действия η называется отношение полезной работы или мощности * к работе или мощности движущих сил:

$$\eta = \frac{A_n}{A_\partial} = \frac{N_n}{N_\partial}. \tag{157}$$

Так как вследствие вредных сопротивлений $A_n \leqslant A_\partial$, то $\eta \leqslant 1$.

При вычислении работы нужно различать следующие случаи.

1. Прямолинейное движение под действием постоянной силы; в задачах такого типа применяются формулы (147) и (148) (задачи 756, 762).

2. Прямолинейное движение под действием силы, являющейся функцией расстояния (задача 768); в задачах такого типа применяется формула (144), которая, если направим ось x по траектории точки, принимает вид:

$$A = \int_{x_0}^{x} X\, dx. \tag{144'}$$

3. Криволинейное движение под действием постоянной по модулю и направлению силы; в этом случае можно использовать формулу (144).

4. Криволинейное движение под действием силы, которая является функцией координат точки приложения силы.

Здесь определение работы сводится к вычислению криволинейного интеграла по формуле (144). Если в рассматриваемом случае существует силовая функция, то работу определяют по формуле (149) или (152).

5. Вращательное движение твердого тела под действием постоянного момента или момента, являющегося функцией угла поворота тела; в этом случае для вычисления работы применяется формула (146).

* Если мощность определяется по формуле (154).

Для вычисления мощности в зависимости от характера движения пользуемся формулой (153), если имеется прямолинейное или криволинейное движение точки приложения силы (задачи 760, 764), или формулой (155) — в случае вращательного движения твердого тела (задачи 771, 772, 765). Среднюю мощность можно определять по формуле (154).

Пример 129

Вдоль тяги, при помощи которой тянут вагончик по горизонтальному пути, действует постоянная сила $F = 25$ *кГ* (рис. 177).

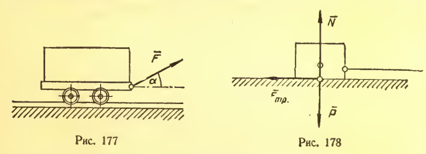


Рис. 177

Рис. 178

Тяга образует с горизонтом угол $\alpha = 32°$. Определить работу, совершенную силой F на пути $\sigma = 200$ *м*.

Решение

Здесь работу определяем по формуле (148).

$$A = F\sigma\cos\alpha = 25 \cdot 200 \times 0{,}848 = 4240 \text{ кГм}.$$

Пример 130

Тело весом $P = 20$ *кГ* передвигают по горизонтальному полу при помощи горизонтальной силы на расстояние $\sigma = 6$ *м*. Определить работу, которую совершит при этом сила трения, если коэффициент трения между поверхностью тела и полом $f = 0{,}35$ (рис. 178).

Решение

Согласно закону Кулона, сила трения $F_{Tp} = fN$, где N — нормальное давление тела на поверхность пола, причем в данном случае $N = P = 20$ *кГ*. Так как сила трения направлена в сторону, противоположную движению, то работа этой силы отрицательна:

$$A_{Tp} = -fP\sigma = -0{,}35 \cdot 20 \cdot 6 = -42 \text{ кГм}.$$

Пример 131

Найти работу силы тяжести при перемещении материальной точки из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M(x, y, z)$ (рис. 179).

Решение

Направляя ось z вертикально вверх, имеем:

$$X=0;\ Y=0;\ Z=-P,$$

где P — вес тела. Следовательно, по формуле (139)

$$dA=-Pdz,$$

откуда

$$A=-\int_{z_0}^{z} Pdz=-P(z-z_0)=P(z_0-z), \qquad (158)$$

т. е. *работа силы тяжести равна произведению веса материальной точки на разность ее высот в начальном и конечном положениях, причем эти высоты отсчитываются от произвольно выбранной горизонтальной плоскости.*

Пример 132

Определить работу силы упругости растянутого стержня, к концу которого подвешен груз M, при перемещении этого груза из положения M_0 в положение M, если длина недеформированного стержня равна l_0 (рис. 180).

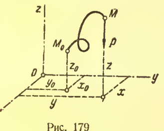


Рис. 179

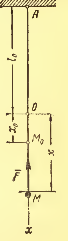


Рис. 180

Решение

Обозначая силу упругости F и направив ось x по вертикали вниз, имеем $F=cx$, где x — удлинение стержня, c — его жесткость. Следовательно,

$$dA = X\,dx = -cx \cdot dx$$

$$A = -\int_{x_0}^{x} cx\,dx = -\frac{c}{2}(x^2 - x_0^2). \qquad (159)$$

Пример 133

На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси выражаются так:

$$X = 2x + y;\; Y = x + z^2;\; Z = 2yz + 1.$$

Определить работу этой силы при перемещении точки из положения $M_0(1;\ 2;\ 3)$ в положение $M_1(2;\ 3;\ 4)$, если сила выражена в *кГ*, а координаты — в *см*.

Решение

Выясним прежде всего, существует ли в данном случае силовая функция: для этого находим частные производные

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1;\; \frac{\partial Y}{\partial x} = 1;\;\; \frac{\partial Y}{\partial z} = 2z;\;\; \frac{\partial Z}{\partial y} = 2z;$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0;\;\; \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

Отсюда получаем, что:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};\;\; \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y};\;\; \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

т. е. условия (141) выполняются, и силовая функция существует. Полный дифференциал этой функции равен элементарной работе, т. е. $dU = dA$. Элементарную работу находим по формуле $dA = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ или, подставляя значения X, Y, Z,

$$dA = (2x + y)\,dx + (x + z^2)\,dy + (2yz + 1)\,dz = 2x\,dx + \\ + y\,dx + x\,dy + z^2dy + 2yzdz + dz.$$

Это выражение действительно является полным дифференциалом:

$$dA = d(x^2) + d(xy) + d(yz^2) + d(z) = d\,(x^2 + xy + \\ + yz^2 + z).$$

Итак, $$dU = d\,(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

Отсюда $$U = x^2 + xy + yz^2 + z + C.$$

Значения функции U в точках M_0 и M равны

$$U_0 = 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3^2 + 3 + C = 24 + C,$$
$$U_1 = 2^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4^2 + 4 + C = 62 + C.$$

Следовательно, искомая работа равна:

$$A = U_1 - U_0 = 62 - 24 = 38 \text{ кГ} \cdot \text{см}.$$

Пример 134

Определить работу центральной силы, модуль которой является функцией расстояния материальной точки от центра этой силы, т. е. $F = f(r)$ (рис. 181).

Решение

В данном случае единичный вектор силы $\bar{F}$ равен $\pm\frac{\bar{r}}{r}$, причем знак (+ или —) выбирается в зависимости от того, отталкивается от центра силы или притягивается к нему точка M.

Таким образом, вектор силы $\bar{F}$ выразится так:

$$\bar{F} = \pm f(r)\frac{\bar{r}}{r}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (138), имеем:

$$dA = \bar{F}\cdot\bar{dr} = \pm f(r)\frac{\bar{r}}{r}\,\bar{dr},$$

но $r\cdot dr = \bar{r}\cdot\bar{dr}$, следовательно,

$$dA = \pm f(r)\frac{rdr}{r} = \pm f(r)\,dr,$$

Рис. 181

т. е. элементарная работа является полным дифференциалом и, значит, существует силовая функция, причем

$$dU = dA = \pm f(r)\,dr,$$

отсюда

$$U = \pm\int f(r)\,dr.$$

Итак, в данном случае имеем общую формулу, по которой сразу можем определить силовую функцию в зависимости от радиуса-вектора точки приложения силы, а затем вычислить работу силы при перемещении этой точки из положения $M_0(\bar{r}_0)$ в положение $M(\bar{r})$:

$$A = U - U_0 = U(r) - U(r_0) = \int_{r_0}^{r} \pm f(r)\,dr. \qquad (160)$$

Пример 135

Один конец пружины закреплен шарнирно в точке O, а к другому концу ее прикреплен шарик. Длина нерастянутой пружины — l_0, жесткость ее — c. Шарик перемещают из положения M_1

в положение M_2, причем пружина растянута и не изгибается. Определить работу силы упругости пружины, если

$$OM_1 = r_1 \quad \text{и} \quad OM_2 = r_2$$

(рис. 182).

Решение

Модуль силы упругости пружины в данном случае выражается так:

$$F = c(r - l_0) = f(r).$$

Следовательно, можно воспользоваться формулой (160)

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} c(r - l_0)\,dr = \left|\frac{c(r - l_0)^2}{2}\right|_{r_2}^{r_1} = \frac{c}{2}[(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2].$$

Знак минус перед интегралом стоит потому, что сила *притягивает* шарик к центру O.

Пример 136

Колесо радиусом R катится без скольжения по горизонтальному рельсу. Найти работу трения качения при перемещении

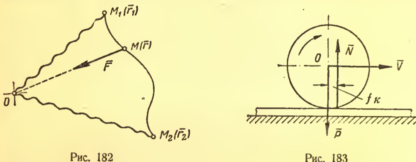


Рис. 182

Рис. 183

центра колеса на расстояние s, если вертикальная нагрузка на ось колеса будет P и коэффициент трения качения $f_к$ (рис. 183).

Решение

Трение качения возникает, как известно, вследствие деформаций колеса и рельса. Момент пары трения качения по закону Кулона будет равен:

$$M_к = f_к N = f_к P.$$

Так как эта пара стремится повернуть колесо в направлении, противоположном его вращению, то работа трения качения будет

отрицательна и равна произведению постоянного момента $M_к$ на угол поворота φ колеса (по формуле (146)), т. е.

$$A = -M_к\,\varphi = -f_к P \varphi.$$

При качении колеса без скольжения имеем: $s = R \cdot \varphi$. Следовательно, $A = -f_к \frac{P}{r} s$.

Пример 137

Для определения натяжений S_1 и S_2 ветвей конвейерной ленты привод A конвейера установлен на катки и включен динамометр D между приводом и неподвижной стойкой C.

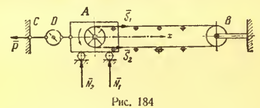


Рис. 184

Определить натяжения S_1 и S_2, если показание динамометра равно P, диаметр приводного барабана $d_м$, потребляемая электродвигателем привода мощность равна N и приводной барабан делает n оборотов в минуту (рис. 184).

Решение

Рассматривая равновесие действующих на привод сил и пренебрегая трением между катками и опорной плоскостью, имеем:

$$\sum X = S_1 + S_2 - P = 0,$$

откуда

$$S_1 + S_2 = P. \tag{a}$$

Так как привод барабана вращается равномерно, то вращающий момент на валу двигателя, очевидно, определится так:

$$M_{вр} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} = (S_1 - S_2) \frac{d}{2},$$

но, на основании формулы (155), мощность двигателя

$$N = M_{вр} \cdot \omega = \frac{\pi \cdot n}{30} M_{вр}\, кГм/сек = \frac{M_{вр}\, n}{975}\ квт.$$

Отсюда

$$M_{вр} = 975 \frac{N}{n}$$

и, следовательно,

$$S_1 - S_2 = 975 \frac{N}{n} \cdot \frac{2}{d}. \tag{б}$$

Решая совместно уравнения (а) и (б), находим:

$$S_1 = \frac{P}{2} + 975 \frac{N}{nd},$$
$$S_2 = \frac{P}{2} - 975 \frac{N}{nd}.$$

Пример 138

Найти мощность машины, поднимающей 100 раз в минуту молот весом $P = 900$ *кГ* на высоту $h = 0{,}6$ *м*, если коэффициент полезного действия $\eta = 0{,}8$.

Решение

Находим полезную работу за 1 *мин*,

$$A_n = P\,h\,100 = 900 \cdot 0{,}6 \cdot 100 = 54000 \text{ кГм}.$$

Теперь по формуле (154) находим полезную мощность

$$N_n = \frac{A_n}{t} = \frac{54000}{60} = 900 \text{ кГм/сек}.$$

Далее, пользуясь формулой (157), определяем искомую мощность двигателя:

$$N = \frac{N_n}{\eta} = \frac{900}{0{,}8} = 1125 \frac{\text{кГм}}{\text{сек}} = 15 \text{ л. с.} = 11 \text{ квт}.$$

Таблица 14

Классификация задач

Группы	Типы задач		
	I (прямолинейное движение)	II (криволинейное движение)	III (вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси)
1-ая	Действующая сила постоянна ($F = \text{const}$), Задачи 756—764, 766	Действующая сила постоянна ($\bar{F} = \text{const}$),	Вращающий момент постоянный. Задачи 755, 765, 767, 771, 772
2-ая	Действующая сила зависит от положения точки приложения силы [$F = f(x)$], Задачи 768, 790 (вычисление потенциальной энергии), 769, 784	Действующая сила зависит от координат точки приложения силы [$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$]. Задачи 770, 788 (вычисление работы)	Вращающий момент зависит от угла поворота тела

§ 4. Теорема о кинетической энергии материальной точки

Кинетическая энергия материальной точки выражается половиной произведения массы этой точки на квадрат ее скорости.

Теорему о кинетической энергии материальной точки можно выразить тремя способами:

$$1)\ d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F\cos\alpha\, ds = dA, \tag{161}$$

т. е. *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку,*

$$2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dA}{dt} = N, \tag{162}$$

т. е. *производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности силы, действующей на эту точку,*

$$3)\ \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{(M_0)}^{(M)} F\cos\alpha\, ds, \tag{163}$$

т. е. *изменение кинетической энергии материальной точки на конечном пути M_0M равно работе силы, действующей на точку на том же пути.*

Если на точку действует несколько сил, то в правые части уравнений (161) — (163) входит работа или мощность равнодействующей этих сил, которая равна сумме работ или мощностей всех составляющих сил.

В случае прямолинейного движения точки, направляя ось x по прямой, по которой движется точка, будем иметь:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx \tag{161'}$$

и

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{x_0}^{x} Xdx, \tag{163'}$$

где $X = \pm F$, так как в этом случае равнодействующая всех приложенных к точке сил направлена по оси x.

Применяя теорему о кинетической энергии в случае несвободного движения материальной точки, нужно иметь в виду следующее:

если на точку наложена совершенная стационарная связь (точка движется по абсолютно гладкой неподвижной поверхности или линии), то реакция связи в уравнения не входит, ибо эта реакция направлена по нормали к траектории точки и, следовательно, ее работа равна нулю. Если же приходится учитывать трение, то в уравнение кинетической энергии войдет работа или мощность силы трения.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на два основных типа.

I. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при прямолинейном движении точки.

II. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при криволинейном движении точки.

Кроме того, задачи, относящиеся к типу I, можно разделить на три группы:

1) сила, действующая на точку (или равнодействующая), постоянна, т. е. $X = \text{const}$, где X — проекция силы (или равнодействующей) на ось x, направленную по прямолинейной траектории точки;

2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), является функцией расстояния (абсциссы этой точки), т. е.

$$X = f(x);$$

3) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция скорости этой точки, т. е.

$$X = f(v).$$

Задачи, относящиеся к типу II, можно разделить на две группы:

1) сила, действующая на точку (или равнодействующая), постоянна и по модулю и по направлению;

2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция положения этой точки (функция координат точки).

ЗАДАЧИ ТИПА I

Первая группа

Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы

В этом случае $F = \text{const}$, и уравнение кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \pm F\sigma,$$

где σ — путь, пройденный точкой.

Из этого уравнения определяется скорость v, если пройденный путь известен, или, наоборот, по заданной скорости v определяется пройденный путь σ.

Пример 139

Вагонетка движется самокатом вниз по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 185).

Определить скорость вагонетки в конце пути, длина которого равна l; начальная скорость вагонетки $v_0=0$, коэффициент общего сопротивления движению f.

Решение

На вагонетку действуют: сила тяжести $P=mg$, нормальная реакция N наклонной плоскости и сила сопротивления движению $F=f\cdot N$. Применяя теорему о кинетической энергии на пути длиной l, имеем:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_P+A_F,$$

но $v_0=0$,

$$A_P=mgh=mgl\sin\alpha;$$
$$A_F=-F\,l=-f\,N\,l.$$

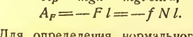


Рис. 185

Для определения нормального давления вагонетки на наклонную плоскость вес вагонетки $\overline{P}$ разлагаем на две составляющие, направленные вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней.

Последняя составляющая и определяет нормальное давление на плоскость, равное нормальной реакции этой плоскости.

Следовательно: $N=mg\cos\alpha$ и $A_F=-f\cdot mg\cos\alpha\cdot l$. Таким образом, уравнение кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2}=mgl\sin\alpha-fmgl\cos\alpha=mgl(\sin\alpha-l\cos\alpha),$$

откуда

$$v=\sqrt{2gl(\sin\alpha-f\cos\alpha)}.$$

Следует заметить, что при решении некоторых задач можно одновременно применять теорему о кинетической энергии и теорему о количестве движения. Это относится к задачам, в которых рассматривается движение под действием постоянной силы (задачи 678, 775, 776, 779), или силы, зависящей от скорости (задачи 687, 689, 693, 696), причем требуется определить и время движения точки. Для определения времени движения следует применить теорему о количестве движения, а при определении пути — теорему кинетической энергии.

Пример 140

Телу весом P, лежащему на горизонтальной плоскости, сообщают начальную горизонтальную скорость v_0. Во сколько времени и на каком расстоянии остановится тело, если коэффициент трения тела о плоскость равен f?

Решение

Так как в задаче требуется определить время движения и расстояние, пройденное телом до остановки, то при решении этой задачи проще всего воспользоваться и теоремой о количестве движения, и теоремой о кинетической энергии. Так как скорость тела в момент остановки равна нулю, то, применяя теорему о количестве движения, будем иметь:

$$-mv_0 = -F_{Tp}\,t,$$

откуда

$$t = \frac{mv_0}{F_{Tp}} = \frac{Pv_0}{g\,F_{Tp}}.$$

По закону Кулона сила трения $F_{Tp} = f\,N$, причем в данном случае $N = P$. Следовательно, $t = \frac{v_0}{fg}$.

Далее, применяя теорему о кинетической энергии, будем иметь:

$$-\frac{Pv_0^2}{2g} = -F_{Tp}\sigma,$$

где σ — путь, пройденный телом до остановки.
Отсюда находим:

$$\sigma = \frac{Pv_0^2}{2gF_{Tp}} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Вторая группа

Точка движется прямолинейно под действием силы, которая является функцией абсциссы этой точки

В этом случае $X = f(x)$, следовательно, по формуле (163') будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) -$$

это уравнение, устанавливающее зависимость между v и x, позволяет найти величину x, если скорость v известна, или, наоборот, зная x, определить v.

Пример 141

Клеть весом P опускается на канате равномерно со скоростью v_0. Внезапно верхний конец каната защемляется. Определить наибольшее удлинение каната после защемления, если его статическое удлинение под действием веса клети равно λ_{cT} (рис. 186).

Решение

На клеть действуют две силы: сила веса P и сила упругости каната $F = c\,\lambda$, где c — жесткость каната, λ — его удлинение.

Пока клеть опускается равномерно, удлинение каната равно статическому удлинению ($\lambda = \lambda_{cT}$) и сила P уравновешивается силой упругости каната, т. е.

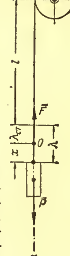


Рис. 186

$$F_{cT} = c\,\lambda_{cT} = P,$$

откуда

$$c = \frac{P}{\lambda_{cT}}$$

и, следовательно,

$$F = \frac{P}{\lambda_{cT}}\,\lambda.$$

Положение центра тяжести клети в момент защемления каната выбираем за начало координат и ось x направляем по вертикали вниз. После защемления каната, благодаря его способности деформироваться, клеть продолжает опускаться. В момент, когда удлинение каната достигает максимальной величины, скорость клети обращается в нуль. Обозначая X проекцию на ось x равнодействующей сил, приложенных к клети, и учитывая, что $\lambda = \lambda_{cT} + x$, имеем:

$$X = P - F = P - \frac{P}{\lambda_{cT}}\,\lambda = P - \frac{P}{\lambda_{cT}}\,(x + \lambda_{cT}) = -\frac{P}{\lambda_{cT}}\,x.$$

Применяя теорему о кинетической энергии, имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X dx = -\frac{P}{\lambda_{cT}}\int_{0}^{x} x dx = -\frac{P}{2\lambda_{cT}}\,x^2.$$

Но при $x = x_{\max}$ скорость клети v равна нулю; поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{P}{2\lambda_{cT}}\;x^2_{\max},$$

откуда

$$x^2_{\max} = \frac{mv_0^2}{P}\,\lambda_{cT} = \frac{v_0^2}{g}\,\lambda_{cT} \text{ и } x_{\max} = v_0\,\sqrt{\frac{\lambda_{cT}}{g}}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\max} = \lambda_{cT} + x_{\max} = \lambda_{cT} + v_0\,\sqrt{\frac{\lambda_{cT}}{g}}.$$

Третья группа

Точка движется прямолинейно под действием силы, являющейся функцией скорости этой точки

В этом случае $X=f(v)$ и, как было указано выше, теорему о кинетической энергии применяют в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=Xdx=f(v)\,dx.$$

Прежде чем интегрировать, здесь нужно разделить переменные, что даст:

$$m\frac{v\,dv}{f(v)}=dx.\ \text{Отсюда: } m\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}=x-x_0.$$

Выполнив интегрирование и решив полученное после этого уравнение относительно v, находим скорость как некоторую функцию от x, т. е. $v=\Phi(x)$. Если в задаче требуется найти закон прямолинейного движения точки, то, заменяя v на $\frac{dx}{dt}$, получим:

$$\frac{dx}{dt}=\Phi(x),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{dx}{\Phi(x)}=dt;$$

отсюда

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\Phi(x)}=\int_{0}^{t}dt=t.$$

Это уравнение устанавливает зависимость между x и t, т. е. дает искомый закон движения материальной точки.

Пример 142

В момент, когда скорость моторного судна равна v_0, выключается мотор. Сила сопротивления воды определяется по эмпирической формуле:

$$R=\alpha v+\beta v^2,$$

где α и β — постоянные. Масса судна равна m. Найти расстояние, которое пройдет судно с момента выключения мотора до остановки.

Решение

Направляем ось x в сторону движения судна и выбираем начало координат в той точке, где находился центр тяжести судна

в момент выключения мотора. Проекция на ось x силы сопротивления, приложенной к судну, равна

$$X = -(\alpha v + \beta v^2).$$

Так как эта сила является функцией скорости, то применяем теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx = -(\alpha + \beta v)\,v dx.$$

Разделяя переменные, получим:

$$-\frac{mdv}{\alpha + \beta v} = dx.$$

Обозначая σ путь, пройденный судном, и учитывая, что в начале этого пути скорость судна равна v_0, а в конце обращается в нуль, имеем:

$$\int_0^\sigma dx = -m\int_{v_0}^0 \frac{dv}{\alpha + \beta v} = m\int_0^{v_0} \frac{dv}{\alpha + \beta v} = \frac{m}{\beta}\int_0^{v_0} \ln(\alpha + \beta v) =$$

$$= \frac{m}{\beta}\ln\frac{\alpha + \beta v_0}{\alpha}, \quad \text{откуда} \quad \sigma = \frac{m}{\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}v_0\right).$$

В случае, когда действующая на материальную точку сила зависит от скорости этой точки, закон движения точки можно найти несколько проще, применяя совместно и теорему о количестве движения и теорему о кинетической энергии.

Если $X = f(v)$, то, применяя теорему о количестве движения, в дифференциальной форме, будем иметь*:

$$\frac{m\,dv}{f(v)} = dt.$$

Отсюда, интегрируя, получаем уравнение вида:

$$\varphi(v) = t - t_0. \qquad \text{(а)}$$

Применяя затем теорему о кинетической энергии, в дифференциальной форме, получим:

$$\frac{mv\,dv}{f(v)} = dx.$$

Отсюда, интегрируя, имеем:

$$\psi(v) = x - x_0. \qquad \text{(б)}$$

Исключая теперь из уравнений (а) и (б) переменную v, находим зависимость между координатой x и временем t, т. е. находим искомый закон движения.

---

* См. § 1 настоящей главы.

Пример 143

Материальная точка массой m, получив начальную скорость v_0, движется по горизонтальной, абсолютно гладкой плоскости, испытывая сопротивление среды, определяемое формулой $R = km\sqrt{v}$, где v — скорость точки. Найти закон движения точки.

Решение

Рассмотрим решение этой задачи при помощи совместного применения теоремы о количестве движения и теоремы о кинетической энергии.

Принимая начальное положение точки за начало координат и направляя ось x в сторону движения точки, находим:

$$X = -R = -km\sqrt{v}.$$

Применяя теорему о количестве движения и теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме, имеем:

$$d(mv) = Xdt = -km\sqrt{v}\,dt$$

и

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx = -km\sqrt{v}dx,$$

или, разделяя переменные и сокращая их на m,

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \cdot dt \text{ и } \sqrt{v}\,dv = -kdx;$$

интегрируя эти уравнения, находим:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int_{0}^{t} dt, \quad \int_{v_0}^{v} \sqrt{v}\,dv = -k\int_{0}^{x} dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{v} - \sqrt{v_0} = -\frac{kt}{2} \qquad (а')$$

и

$$v^{\frac{3}{2}} - v_0^{\frac{3}{2}} = -\frac{3kx}{2}. \qquad (б')$$

Чтобы найти зависимость между x и t, достаточно из уравнений (а') и (б') исключить скорость v. Из уравнения (а') имеем:

$$\sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}.$$

Подставляя это значение в уравнение (б'), получаем:

$$x = \frac{2}{3k}\left(v_0^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3k}\left[v_0\sqrt{v_0} - \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^3\right].$$

Это уравнение, выражающее x как функцию времени t, и есть искомый закон движения точки.

Из уравнений (а') и (б') можно также найти время T, в течение которого двигалась точка до остановки, и пройденный ею за это время путь σ. Полагая в равенствах (а) и (б) $v=0$, имеем:

$$T=\frac{2}{k}\sqrt{v_0},\quad \sigma=\frac{2}{3k}v_0^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3k}v_0\sqrt{v_0}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Первая группа

Точка движется криволинейно под действием постоянной силы

Такой постоянной силой является обычно сила тяжести, т. е. вес P материальной точки. Поэтому работа силы определяется по формуле $A=-P(z-z_0)$ при условии, что ось z направлена по вертикали вверх. Следовательно, применяя в этом случае теорему о кинетической энергии, получаем уравнение:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-P(z-z_0).$$

Пример 144

Определить для данного момента высоту h подъема тела M, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, если в этот момент известен угол θ, образуемый скоростью $\bar{v}$ с горизонтальной осью абсцисс.

Сопротивлением воздуха пренебрегаем (рис. 187).

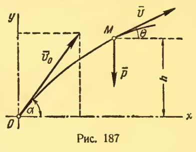


Рис. 187

Решение

Так как действующая на тело сила тяжести $\bar{P}$ вертикальна, то проекция скорости на горизонтальную ось x остается постоянной и равной своему начальному значению, т. е.

$$v_x=\text{const}=v_0\cdot\cos\alpha.$$

С другой стороны, $v_x=v\cos\theta$, поэтому $v_0\cos\alpha=v\cos\theta$ и $v=\frac{v_0\cos\alpha}{\cos\theta}$.

Применяя теорему о кинетической энергии, в конечной форме на участке пути OM имеем:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_p=-P\cdot h=-mgh.$$

Отсюда $h=\frac{v_0^2-v^2}{2g}=\frac{1}{2g}\left(v_0^2-\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}\right)=\frac{v_0^2}{2g}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}\right).$

Вторая группа

Точка движется криволинейно под действием силы, зависящей от положения этой точки

В задачах этой группы теорема о кинетической энергии применяется обычно в случае, когда для сил, действующих на материальную точку, существует силовая функция. Тогда работа вычисляется по формуле (149).

Следовательно, в этом случае будем иметь:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A=U-U_0.$$

Пример 145

Материальная частица массой $m=90\,г$, находящаяся в поле силы тяжести, отталкивается от неподвижного центра O силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния частицы от этого центра (рис. 188). В начальный момент частица находится в по-

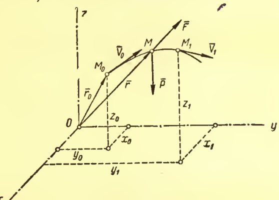


Рис. 188

ложении M_0 ($x_0=1\,см$; $y_0=2\,см$; $z_0=2\,см$) и имеет скорость $v_0=28\sqrt{5}\,см/сек$, направленную так, что при дальнейшем движении частица проходит через точку M_1 ($x_1=2\,см$; $y_1=4\,см$; $z_1=4\,см$).

Определить скорость частицы в точке M_1, если известно, что величина отталкивающей силы в момент, когда частица находится в положении M_0, равна 3000 *дн*.

Решение

На частицу действуют две силы: сила тяжести $P=mg$ и отталкивающая сила $F=\frac{k}{r^2}$, где r — расстояние OM. Определим коэффициент k. В начальный момент по условию задачи

$F=F_0=3000$ *дн* и $r^2=r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=1+4+4=9$. Следовательно, $k=F_0\,r_0^2=3000\cdot 9=27000$.

Применяем теорему о кинетической энергии на участке пути M_0M_1:

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A_P+A_F,$$

но, на основании формул (158) и (160), имеем: $A_P=-P(z_1-z_0)=-mg(z_1-z_0)$;

$$A_F=\int_{r_0}^{r_1}\frac{k}{r^2}\,dr=k\left|-\frac{1}{r}\right|_{r_0}^{r_1}=k\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_0}\right)=\frac{k(r_1-r_0)}{r_1r_0},$$

следовательно,

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-mg(z_1-z_0)+\frac{k(r_1-r_0)}{r_1r_0},$$

кроме того,

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{9}=3\ \textit{см};\quad r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}=6\ \textit{см}.$$

Отсюда

$$v_1^2=v_0^2-2g(z_1-z_0)+\frac{2k(r_1-r_0)}{mr_1r_0}=(28\sqrt{5})^2-2\cdot 980(4-2)+$$
$$+\frac{2\cdot 27000\cdot(6-3)}{90\cdot 6\cdot 3}=3920-3920+100=100$$

и

$$v_1=\sqrt{100}=10\ \textit{см/сек}.$$

Таблица 15

Классификация задач

Типы	Группы задач		
	1-я	2-я	3-я
I Прямолинейное движение точки	Постоянная сила (задачи 773, 774, 777—781, 805)	Сила, зависящая от положения точки (задачи 699, 785—787, 793—796)	Сила, зависящая от скорости (задачи 687, 689, 693, 695, 696, 782)
II Криволинейное движение точки	Постоянная сила (задача 783)	Сила, зависящая от положения точки (задача 788)	

§ 5. Принцип Даламбера для материальной точки

Векторное дифференциальное уравнение движения несвободной точки имеет вид:

$$m\overline{w}=\overline{F}+\overline{N},$$

где $\overline{F}$ — действующая на точку заданная (активная) сила, $\overline{N}$ — реакция связей (рис. 189).

Это уравнение можно переписать так:

$$\overline{F}+\overline{N}+(-m\overline{w})=0. \qquad (164)$$

Последний член уравнения (164) представляет собой некоторую силу, *по модулю равную произведению массы m точки на*

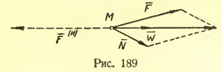


Рис. 189

ее ускорение w и направленную противоположно этому ускорению. Эта сила называется *силой инерции* и обозначается $\overline{F}^{(и)}$, т. е.

$$\overline{F}^{(и)}=-m\overline{w}. \qquad (165)$$

Пользуясь этим обозначением, уравнение (164) можно представить в следующем виде:

$$\overline{F}+\overline{N}+\overline{F}^{(и)}=0, \qquad (164')$$

т. е. *заданная сила, действующая на материальную точку, реакция связей и сила инерции для каждого момента движения уравновешиваются* (принцип Даламбера).

Таким образом, силу инерции можно определить также, как такую силу, которая, будучи приложена к материальной точке, уравновешивает все заданные и реактивные силы, действующие на эту точку.

Проекции силы инерции на координатные оси на основании равенства (165) выражаются следующим образом:

$$F_x^{(и)}=-m\ddot{x},\ F_y^{(и)}=-m\ddot{y},\ F_z^{(и)}=-m\ddot{z}. \qquad (166)$$

При криволинейном движении материальной точки сила инерции слагается из двух составляющих, из которых одна направлена по касательной к траектории, а другая — по главной нормали (рис. 190). Первая составляющая называется касательной или тангенциальной силой инерции и обозначается $\overline{F}_\tau^{(и)}$, вторая составляющая называется нормальной силой инерции или центробежной силой и обозначается $\overline{F}_n^{(и)}$, причем

$$\overline{F}_\tau^{(и)}=-m\overline{w}^{(\tau)},\quad \overline{F}_n^{(и)}=-m\overline{w}^{(n)}. \qquad (167)$$

Для модулей тангенциальной и нормальной сил инерции имеем следующие выражения:

$$|\bar{F}_\tau^{(и)}| = m\left|\frac{dv}{dt}\right|, \quad |\bar{F}_n^{(и)}| = \frac{mv^2}{\rho}. \qquad (167')$$

Если точка совершает вращательное движение по окружности радиусом R с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε, то

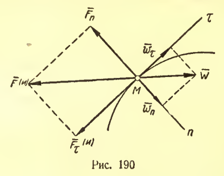


Рис. 190

модули тангенциальной и нормальной сил инерции выразятся следующим образом:

$$|\bar{F}_\tau^{(и)}| = mR|\varepsilon|, \quad |\bar{F}_n^{(и)}| = mR\omega^2. \qquad (168)$$

Тангенциальная и нормальная силы инерции направлены соответственно противоположно тангенциальному и нормальному ускорениям точки.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующих три типа:

I. Материальная точка движется прямолинейно.

II. Материальная точка совершает криволинейное равномерное движение.

III. Материальная точка совершает неравномерное криволинейное движение.

ЗАДАЧИ ТИПА I

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(задачи 637—640, 647, 648, 649)

В этом случае радиус кривизны траектории $\rho = \infty$ и, следовательно, $F_n^{(и)} = \frac{mv^2}{\rho} = 0$, поэтому сила инерции состоит из одной тангенциальной составляющей, т. е. $\bar{F}^{(и)} = \bar{F}_\tau^{(и)}$.

Пример 146

Тело весом $\overline{P}$ движется прямолинейно с данным ускорением $\overline{w}$ по горизонтальной плоскости под действием некоторой силы $\overline{F}$, образующей с горизонтом угол α. Определить модуль этой силы, если коэффициент трения между передвигаемым телом и плоскостью равен f (рис. 191).

Решение

На рис. 191 показаны действующие на тело силы: вес $\overline{P}$, сила $\overline{F}$, нормальная реакция пола $\overline{N}$ и сила трения $\overline{F}_{тр}$. Если приложить к телу силу инерции $\overline{F}^{(и)}$, направленную противоположно ускорению $\overline{w}$, то располагая координатные оси, как указано на рисунке, будем иметь два уравнения равновесия:

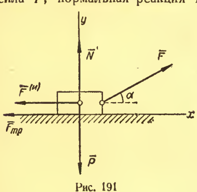


Рис. 191

$$\sum X = F\cdot\cos\alpha - fN - F^{(и)} = 0,$$
$$\sum Y = F\cdot\sin\alpha - P + N = 0,$$

причем $F^{(и)} = mw = \frac{P}{g}w$.

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$F = \frac{P\left(f + \frac{w}{g}\right)}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = \frac{fg + w}{g(\cos\alpha + f\sin\alpha)}P.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

РАВНОМЕРНОЕ КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(задачи 646, 670)

Если материальная точка движется по некоторой кривой с постоянной по модулю скоростью ($v = \text{const}$), то тангенциальное ускорение точки равно $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, поэтому сила инерции состоит из одной только нормальной составляющей, т. е. $\overline{F}^{(и)} = \overline{F}_n^{(и)}$.

Пример 147

Полый полушар радиусом $R = 2$ *м* равномерно вращается вокруг своей вертикально расположенной оси симметрии, делая 30 *об/мин*. Внутри полушара находится шарик весом $P = 0{,}2$ *кГ*.

Найти высоту h, соответствующую положению равновесия шарика относительно полушара и реакцию полушара $\overline{N}$ в этом положении (рис. 192).

Решение

Три силы — вес шарика $\overline{P}$, нормальная реакция полушара $\overline{N}$ и сила инерции $\overline{F}^{(и)}$ — уравновешиваются. Располагая координатные оси как указано на рисунке и обозначая α угол, образуемый реакцией $\overline{N}$ с горизонтом, составляем уравнения равновесия:

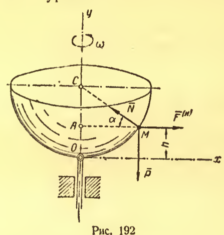


Рис. 192

$$\sum X = F^{(и)} - N\cos\alpha = 0; \quad \sum Y = N\sin\alpha - P = 0.$$

Учитывая, что $F_n^{(и)} = m\,AM\,\omega^2 = mR\cos\alpha\,\omega^2$, эти уравнения можно переписать так:

$$N\cos\alpha = mR\cos\alpha\,\omega^2, \quad N\sin\alpha = P.$$

Из первого уравнения находим:

$$N = mR\omega^2 = \frac{P}{g}R\omega^2, \text{ но } \omega = \frac{\pi\cdot n}{30} = \pi\,\frac{1}{сек}.$$

Следовательно, $N = \frac{P}{g}R\pi^2 = \frac{0{,}2}{9{,}81}\cdot 2\cdot 9{,}86 \approx 0{,}4\ кГ.$

Из второго уравнения находим

$$\sin\alpha = \frac{P}{N} = \frac{Pg}{PR\pi^2} = \frac{g}{R\pi^2} = \frac{9{,}81}{2\cdot 9{,}86} = \frac{1}{2},$$

откуда $\alpha = 30°$. Далее из треугольника CMA имеем:

$$CA = R\sin\alpha = 1\ м$$

и, следовательно,

$$h = OA = OC - CA = 2 - 1 = 1\ м.$$

Пример 148

Лента ленточного конвейера наклонена к горизонту под углом α. Определить минимальную скорость ленты, при которой несомая лентой частица руды отделяется от поверхности ленты в месте набегания ленты на барабан, если радиус барабана равен R (рис. 193).

Решение

На частицу, находящуюся в данный момент в точке набегания ленты на барабан, действуют: вес P, нормальная реакция барабана N и сила трения F_{Tp}. Прикладываем к частице нормальную

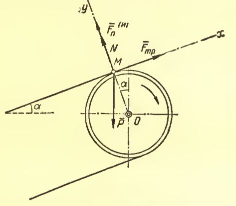


Рис. 193

силу инерции $F_n^{(и)}$ и составляем уравнение равновесия полученной после этого системы сил, проектируя эти силы на ось y, направленную по нормали к поверхности ленты:

$$\sum Y = F_n^{(и)} + N - P\cos\alpha = 0,$$

но $F_n^{(и)} = \frac{mv^2}{R}$, поэтому $N = P\cdot\cos\alpha - \frac{Pv^2}{gR}$. Частица отделяется от поверхности ленты в месте набегания ленты на барабан, если $N=0$. Поэтому минимальная скорость, при которой происходит отделение частицы от ленты, определяется из уравнения:

$$P\cos\alpha - \frac{Pv^2}{gR} = 0,$$

откуда

$$v = \sqrt{gR\cos\alpha}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

НЕРАВНОМЕРНОЕ КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(задачи 816—820, 822, 802, 803)

В этом случае при решении задач по принципу Даламбера к движущейся материальной точке необходимо прикладывать две силы инерции: тангенциальную $F_\tau^{(и)}$ и нормальную $F_n^{(и)}$. Уравнения равновесия лучше составлять так, чтобы в каждое уравнение входила только одна из этих сил инерции, для чего координатные оси следует направлять по касательной и главной нормали к траектории движущейся точки.

В выражение нормальной силы инерции входит величина v. Если скорость v в данной задаче неизвестна, то в большинстве случаев для ее нахождения удобно применить теорему о кинетической энергии материальной точки.

Пример 149

Математический маятник длиной l и весом $\overline{P}$ отвели на угол φ_0 от положения равновесия и сообщили ему начальную скорость $\overline{v}_0$, направленную перпендикулярно к нити вверх. Найти натяжение нити маятника в зависимости от угла φ нити с вертикалью (рис. 194).

Решение

Четыре силы — вес маятника $\overline{P}$, реакция нити $\overline{N}$, касательная и нормальная силы инерции $\overline{F}_\tau^{(и)}$ и $\overline{F}_n^{(и)}$, согласно принципу Далам-

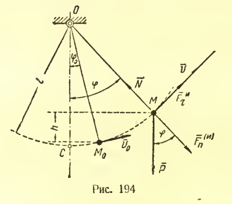


Рис. 194

бера, уравновешиваются. Поэтому, проектируя эти силы на нормаль траектории маятника (на направление радиуса MO), получим:

$$N - P\cos\varphi - F_n^{(и)} = 0.$$

Так как $F_n^{(и)} = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l}$, то из этого уравнения находим:

$$N = P\cos\varphi + \frac{mv^2}{l}.$$

Чтобы найти скорость v маятника, применим на участке пути M_0M теорему о кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P = -P\,h.$$

Отсюда $mv^2 = mv_0^2 - 2Ph = P\left(\frac{v_0^2}{g} - 2h\right)$

и, следовательно,

$$N = P\cos\varphi + \frac{P}{l}\left(\frac{v_0^2}{g} - 2h\right) = P\left(\cos\varphi + \frac{v_0^2}{lg} - \frac{2h}{l}\right).$$

Но $h = l\cos\varphi_0 - l\cos\varphi = l(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$, а поэтому

$$N = P\left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0 + \frac{v_0^2}{lg}\right).$$

Пример 150

Материальная частица находится внутри цилиндра радиусом R. В начальный момент частица находится в положении M_0 и получает вертикальную скорость $\overline{v}_0$. Коэффициент трения частицы о поверхность цилиндра будет f. Пренебрегая действием силы тяжести, найти зависимость между скоростью v частицы и углом α, определяющим ее положение внутри цилиндра (рис. 195).

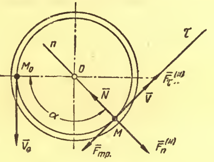


Рис. 195

Решение

На частицу действуют: нормальная реакция цилиндра и сила трения $\overline{F}_{Tp}$. Применяя принцип Даламбера, прикладываем к частице тангенциальную $\overline{F}_\tau^{(и)}$ и нормальную $\overline{F}_n^{(и)}$ силы инерции. Приравнивая нулю сумму проекций этих сил на нормаль, получим:

$$N - F_n^{(и)} = 0,$$

или

$$N = F_n^{(\text{н})} = \frac{mv^2}{R}.$$

Согласно закону Кулона,

$$F_{\text{Тр}} = f N = f\frac{mv^2}{R}.$$

Далее применяем теорему о кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_{\text{Тр}}\cdot ds.$$

Отсюда, учитывая, что $ds = Rd\alpha$, имеем: $mvdv = -\frac{mv^2}{R} f R\, d\alpha$ или $\frac{dv}{v} = -f d\alpha$.

Интегрируем:

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -f\int\limits_{0}^{\alpha} d\alpha \quad \text{или} \quad \ln\frac{v}{v_0} = -f\alpha,$$

откуда $v = v_0 e^{-f\alpha}$.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

ГЛАВА IV

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

§ 1. Теоремы о количестве движения системы и о движении центра масс

Количеством движения системы называется геометрическая сумма количеств движения всех материальных точек этой системы, т. е.

$$\overline{K} = \sum m\overline{v}, \tag{169}$$

где $\overline{K}$ — количество движения системы; отсюда получаем проекции количества движения на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \sum mv_x = \sum m\frac{dx}{dt} = \sum m\dot{x} \\ K_y &= \sum mv_y = \sum m\frac{dy}{dt} = \sum m\dot{y} \\ K_z &= \sum mv_z = \sum m\frac{dz}{dt} = \sum m\dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{169'}$$

Теорема о количестве движения системы формулируется так: *Векторная производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил, приложенных к этой системе, т. е.*

$$\frac{d\overline{K}}{dt}=\overline{R}^{(e)}=\sum \overline{F}^{(e)};\qquad(170)$$

отсюда следует, что производная по времени от проекции количества движения системы на данную неподвижную ось равна проекции главного вектора внешних сил на ту же ось, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dK_x}{dt}&=R_x^{(e)}=\sum X^{(e)},\\ \frac{dK_y}{dt}&=R_y^{(e)}=\sum Y^{(e)},\\ \frac{dK_z}{dt}&=R_z^{(e)}=\sum Z^{(e)}.\end{aligned}\right\}\qquad(171)$$

Центром масс системы называется геометрическая точка C, координаты которой определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}x_C&=\frac{\Sigma\, mx}{M},\\ y_C&=\frac{\Sigma\, my}{M},\\ z_C&=\frac{\Sigma\, mz}{M},\end{aligned}\right\}\qquad(172)$$

где M — масса данной системы, $M=\sum m$; x, y, z — координаты материальных точек этой системы. Из формул (172) следует, что положения центра масс и центра тяжести твердого тела совпадают.

Если данная система состоит из нескольких, например, из трех тел, то, обозначая массы этих тел M_1, M_2, M_3, а их центры масс (центры тяжести) C_1, C_2, C_3, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}x_C&=\frac{M_1x_{C_1}+M_2x_{C_2}+M_3x_{C_3}}{M},\\ y_C&=\frac{M_1y_{C_1}+M_2y_{C_2}+M_3y_{C_3}}{M},\\ z_C&=\frac{M_1z_{C_1}+M_2z_{C_2}+M_3z_{C_3}}{M}.\end{aligned}\right\}\qquad(172')$$

Если предположить, что в центре масс сосредоточена вся масса системы, то количество движения системы будет равно количеству движения ее центра масс (центра тяжести). Следовательно, обозначая через v_C скорость центра масс системы, будем иметь

$$\overline{K}=M\overline{v}_C,\qquad(173)$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned}K_x&=Mv_{C_x}=M\dot{x}_C,\\ K_y&=Mv_{C_y}=M\dot{y}_C,\\ K_z&=Mv_{C_z}=M\dot{z}_C.\end{aligned}\right\}\qquad(173')$$

Учитывая, что ускорение центра масс C равно $\overline{w}_C = \frac{d\overline{v}_C}{dt}$, из равенств (170) и (173) имеем:

$$M\overline{w}_C = \overline{R}^{(e)} = \sum \overline{F}^{(e)}, \tag{174}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x}_C &= R_x^{(e)} = \sum X^{(e)}, \\ M\ddot{y}_C &= R_y^{(e)} = \sum Y^{(e)}, \\ M\ddot{z}_C &= R_z^{(e)} = \sum Z^{(e)}. \end{aligned}\right\} \tag{174'}$$

Уравнения (174′) представляют собой дифференциальные уравнения движения центра масс системы и выражают следующую теорему о движении этого центра: *центр масс системы движется так же, как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на эту систему.*

Следствие. *Если главный вектор внешних сил или его проекция на данную неподвижную ось равны нулю, то количество движения системы или его проекция на эту ось остаются неизменными,* т. е.

1) если $\overline{R}^{(e)} = \sum \overline{F}^{(e)} = 0$,

то

$$\overline{K} = \sum m\overline{v} = M\overline{v}_C = \text{const}; \tag{175}$$

2) если $R_x^{(e)} = \sum X^{(e)} = 0$,

то

$$K_x = \sum mv_x = Mv_{Cx} = \text{const}. \tag{175'}$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующих три основных типа:

I. Задачи на вычисление количества движения системы (задачи 966—969).

II. Задачи, в которых рассматривается сохранение количества движения системы или его проекции на данную неподвижную ось, т. е. применяются равенства (175) или (175′). (Задачи 951—957, 970—974).

III. Задачи на применение теоремы о количестве движения системы или о движении центра масс к определению реакции связей (задачи 958—963, 975—980).

ЗАДАЧИ ТИПА I

Задачи этого типа можно решить двумя способами: либо при помощи формул (169) и (169′), либо при помощи формул (173) и (173′).

Пример 151

В механизме, изображенном на рис. 196, кривошип $OO_1 = r$ весом P_1 вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси O с постоянной угловой скоростью ω и приводит в движение колесо I радиусом r и весом P, которое катится без скольжения по неподвижному колесу II радиусом r_2. Центр тяжести колеса I находится в точке O_1. Прямолинейный стержень AB весом P_2, соединенный шарниром A с колесом I, движется поступательно в вертикальных направляющих.

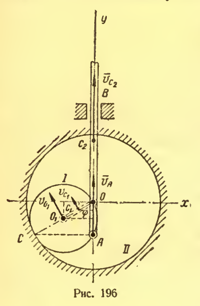


Рис. 196

Найти проекции количества движения этой системы на координатные оси x и y (рис. 196).

Решение

Первый способ. Данная система состоит из трех тел: кривошипа OO_1, подвижного колеса I и стержня AB. Поэтому $\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3$, где $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ — количества движения кривошипа, колеса I и стержня AB.

На основании формулы (173), применяемой к каждому из этих тел в отдельности, имеем:

$$\overline{K} = \frac{P_1}{g}\bar{v}_{C_1} + \frac{P_2}{g}\bar{v}_{C_2} + \frac{P}{g}\bar{v}_{O_1}. \qquad (a)$$

Здесь $\bar{v}_{O_1}$, $\bar{v}_{C_1}$, $\bar{v}_{C_2}$ — соответственно скорости точек O_1, C_1 (центра тяжести кривошипа) и C_2 (центра тяжести стержня).

Так как точки O_1 и C_1 принадлежат кривошипу, вращающемуся вокруг оси O, то векторы $\bar{v}_{C_1}$ и $\bar{v}_{O_1}$ перпендикулярны к OO_1 и по модулю равны:

$$v_{C_1} = \frac{r}{2}\omega \text{ и } v_{O_1} = r \cdot \omega.$$

Так как стержень AB движется поступательно, то $\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_A$, причем вектор $\bar{v}_A$ направлен по AB.

Чтобы найти скорость точки A, принадлежащей колесу I, заметим, что мгновенный центр вращения этого колеса находится в точке C касания колес I и II.

Следовательно:

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r\sin\varphi}{r} = 2\sin\varphi,$$

где $\varphi=\omega t$ — угол поворота кривошипа; отсюда

$$v_A=v_{O_1}\,2\sin\varphi=2r\omega\sin(\omega t).$$

Теперь из равенства (а) находим искомые проекции количества движения данной системы:

$$K_x=-\frac{P_1}{g}v_{C_1}\cos\varphi-\frac{P}{g}\,v_{O_1}\cos\varphi=-\frac{r\omega\cos\varphi}{g}\left(\frac{P_1}{2}+P\right)=$$
$$=-\frac{r\omega\cos\omega t}{2g}\left(P_1+2P\right),$$
$$K_y=\frac{P_1}{g}v_{C_1}\sin\varphi+\frac{P}{g}v_{O_1}\sin\varphi+\frac{P_2}{g}v_A=\frac{P_1}{g}\frac{r}{2}\,\omega\sin\omega t+$$
$$+\frac{P}{g}r\omega\sin\omega t+\frac{2P_2}{g}r\omega\sin\omega t=\frac{r\omega\sin\omega t}{2g}\left(P_1+2P+4P_2\right).$$

Второй способ. На основании формул (172′) имеем:

$$Mx_C=\frac{P_1}{g}x_{C_1}+\frac{P_2}{g}x_{C_2}+\frac{P}{g}x_{O_1},\quad My_{C_1}=\frac{P_1}{g}y_{C_1}+\frac{P_2}{g}y_{C_2}+\frac{P}{g}y_{O_1},$$

где M — масса всей данной системы, состоящей из трех тел, C — центр масс этой системы.

Из рис. 196 находим:

$$x_{C_1}=-OC_1\sin\varphi=-\frac{r}{2}\sin\omega t,\quad x_{C_2}=0,$$
$$y_{C_1}=-OC_1\cos\varphi=-\frac{r}{2}\cos\omega t,\qquad y_{C_2}=AC_2-OA=l-2r\cos\omega t,$$

где

$$l=AC_2=\text{const},$$
$$x_{O_1}=-OO_1\sin\varphi=-r\sin\omega t,$$
$$y_{O_1}=-OO_1\cos\varphi=-r\cos\omega t.$$

Следовательно,

$$Mx_C=-\frac{P_1}{g}\frac{r}{2}\sin\omega t-\frac{P}{g}r\sin\omega t=-\frac{r\sin\omega t}{2g}\left(P_1+2P\right),$$
$$My_C=-\frac{P_1}{g}\frac{r}{2}\cos\omega t-\frac{P}{g}r\cos\omega t+\frac{P_2}{g}\left(l-2r\cos\omega t\right)=$$
$$=-\frac{r\cos\omega t}{2g}\left(P_1+2P+4P_2\right)+\frac{P_2}{g}l.$$

Отсюда на основании формул (173′) получаем:

$$K_x=M\dot{x}_C=\frac{-r\omega\cos\omega t}{2g}\left(P_1+2P\right),\quad K_y=\frac{r\omega\sin\omega t}{2g}\left(P_1+2P+\right.$$
$$\left.+4P_2\right).$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

К задачам второго типа относятся задачи, в которых сумма проекций всех внешних сил на данную неподвижную ось, например, на ось x, равна нулю. В этом случае (см. равенство 175′)

имеем: $K_x = \sum mv_x = \text{const}$. Следовательно, если обозначим K_0 количество движения системы в начальный момент (при $t=0$), то $K_x = K_{0x}$, или

$$\sum mv_x = \sum mv_{0x}. \tag{176}$$

Если в начальный момент система неподвижна, т. е. начальные скорости всех ее точек равны нулю, то в этом случае $K_{0x}=0$, и, следовательно,

$$\sum mv_x = 0. \tag{177}$$

Так как $K_x = Mv_{C_x}$ (см. равенства 173'), то при $K_x = \text{const}$, будем иметь: $v_{C_x} = (v_{Cx})_{t=0}$.

Если в начальный момент скорость центра масс системы равна нулю, то $(v_{Cx})_{t=0}=0$ и, следовательно, $v_{C_x}=0$, или $\frac{dx_C}{dt}=0$; отсюда

$$x_C = \text{const} = x_{C_0}, \tag{178}$$

т. е. *абсцисса центра масс системы в рассматриваемом случае постоянна.*

Задачи второго типа можно решить двумя способами:

1) на основании равенств (176) и (177) или
2) с применением равенства (178).

Пример 152

Определить перемещение плавучего крана, поднимающего груз весом $P_1 = 2m$, при повороте стрелы крана на 30° до вертикального положения. Вес крана $P_2 = 20m$; длина стрелы $OA=8$ *м*. Сопротивлением воды пренебречь (рис. 197).

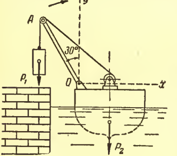


Рис. 197

Решение

Первый способ. В данной задаче имеем систему, состоящую из двух тел: плавучего крана и груза; внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес крана P_1, вес груза P_2 и вертикальное давление воды, направленное снизу вверх (архимедова сила). Так как все эти внешние силы вертикальны, то сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю.

Кроме того, в начальный момент система неподвижна, поэтому используем равенства (176) и (177).

Применяя второе из этих равенств, получим:

$$\frac{P_1}{g}v_{1x}+\frac{P_2}{g}v_{2x}=0,$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции на ось x абсолютных скоростей груза и плавучего крана.

Заменяя v_{1x} и v_{2x} на $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dx_2}{dt}$, где x_1 и x_2 — соответственно абсциссы груза и центра тяжести крана, получим:

$$\frac{P_1}{g}\frac{dx_1}{dt}+\frac{P_2}{g}\frac{dx_2}{dt}=0$$

или, интегрируя,

$$P_1x_1+P_2x_2=\text{const}=P_1x_{01}+P_2x_{02},$$

где x_{01} и x_{02} — абсциссы груза и центра тяжести крана в начальный момент, причем, как видно из рисунка,

$$x_{01}=-OA\sin 30^\circ=-4.$$

В момент, когда стрела займет вертикальное положение, абсцисса x_1 груза будет равна перемещению s крана; следовательно, в этот момент будем иметь:

$$P_1s+P_2x_2=-4P_1+P_2x_{02};$$

или

$$P_1s+P_2(x_2-x_{02})=-4P_1.$$

Так как

$$x_2-x_{02}=s,$$

то

$$(P_1+P_2)s=-4P_1,$$

откуда находим:

$$s=-\frac{4P_1}{P_1+P_2}=-\frac{4}{11}=-0{,}36\ \text{м}.$$

Знак минус указывает на то, что кран переместился влево.

Второй способ. Применяя равенство (178), имеем: $x_C=\text{const}$, где x_C — абсцисса центра масс (центра тяжести) данной системы (груза и крана).

Но

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{P_1x_1+P_2x_2}{P_1+P_2},$$

поэтому

$$P_1x_1+P_2x_2=\text{const}.$$

Таким образом, мы имеем то же уравнение, которое получили выше, при первом способе решения задачи. Из этого уравнения так же, как при первом способе решения, находим искомое перемещение крана.

Пример 153

На горизонтальной платформе весом P_1 установлена наклонная плоскость AB, образующая с горизонтом угол α (рис. 198). По этой наклонной плоскости при помощи лебедки поднимается

груз C весом P_2 так, что расстояние AC изменяется по закону $s=\frac{1}{2}at^2$. В начальный момент вся система находится в покое.

Определить скорость, с которой будет двигаться платформа; сопротивлением движению платформы пренебрегаем (рис. 198).

Решение

Первый способ. В данной задаче мы имеем систему, состоящую из двух тел: платформы и груза C; внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес платформы $\overline{P}_1$, вес груза $\overline{P}_2$ и нормальные реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ рельсов в точках D и

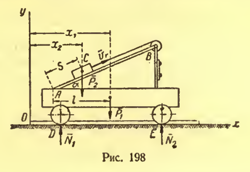


Рис. 198

E. Так как все эти силы вертикальны, то сумма их проекций на горизонтальную ось x равна нулю, т. е. $\sum X^{(e)}=0$; поэтому, учитывая, что в начальный момент система неподвижна и применяя равенство (176), как в предыдущей задаче, получим проекции на ось x скоростей платформы и груза

$$\frac{P_1}{g}v_{1x}+\frac{P_2}{g}v_{2x}=0, \tag{a}$$

где v_{1x} и v_{2x} — проекции на ось x скоростей платформы и груза.

Если поступательное движение платформы принять за переносное движение, то относительным движением груза будет его перемещение по наклонной плоскости AB. Следовательно, вектор $\overline{v}_r$ относительной скорости груза направлен параллельно AB и по модулю равен

$$v_r=\frac{ds}{dt}=at.$$

Вектор $\overline{v}_e$ переносной скорости груза равен скорости платформы $\overline{v}_1$, параллельной оси x; поэтому

$$v_{e_x}=v_{1_x}=v_1.$$

По теореме сложения скоростей будем иметь: $v_{2_x}=v_{e_x}+v_{r_x}= =v_1+at\cos\alpha$. Поэтому равенство (а) перепишется так:

$$\frac{P_1}{g}v_1+\frac{P_2}{g}(v_1+at\cos\alpha)=0.$$

Отсюда находим:

$$v_1=-\frac{P_2}{P_1+P_2}at\cos\alpha.$$

Знак минус указывает на то, что платформа будет перемещаться влево.

Второй способ. Абсцисса центра масс данной системы равна:

$$x_C=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{P_1x_1+P_2x_2}{P_1+P_2},$$

где x_1 и x_2 — абсциссы центров тяжести платформы и груза. Следовательно, на основании равенства (178) имеем: $P_1x_1+P_2x_2= =\text{const}$. Но, как видно из рисунка, $x_2=x_1-l+s\cdot\cos\alpha$, а потому

$$P_1x_1+P_2(x_1-l+s\cos\alpha)=\text{const}.$$

Дифференцируя это равенство по t, получим:

$$P_1\frac{dx_1}{dt}+P_2\left(\frac{dx_1}{dt}+\frac{ds}{dt}\cos\alpha\right)=0,$$

или

$$(P_1+P_2)\frac{dx_1}{dt}=-P_2\,at\cos\alpha,$$

отсюда

$$\frac{dx_1}{dt}=v_1=-\frac{P_2}{P_1+P_2}at\cos\alpha.$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

Задачи типа III, в которых требуется определить реакции связей, также можно решить двумя способами:

1) по теореме о количестве движения системы [по уравнениям (171)];

2) по теореме о движении центра масс [по уравнениям (174)].

Пример 154

Мотор, вес которого равен P_1, прикреплен к фундаменту болтами.

Вес ротора мотора равен P_2, а его центр тяжести C_2 смещен относительно оси вращения на расстояние $OC_2=e$. Ротор вращается по закону $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}$. Определить вертикальное давление

мотора на фундамент и горизонтальное усилие, приходящиеся на все болты, в момент $t = 1$ *сек* (рис. 199).

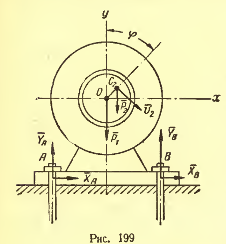


Рис. 199

Решение

Первый способ. В данной задаче мы имеем систему, состоящую из двух тел: корпуса мотора и ротора.

Внешними силами, приложенными к этой системе, являются вес мотора, вес ротора, реакции в болтах.

Обозначим вертикальные реакции в точках A и B через Y_A и Y_B, а горизонтальные реакции — X_A и X_B.

Если количества движения мотора и ротора обозначим $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$, то количество движения данной системы будет $\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2$. Так как мотор неподвижен, то $K_1 = 0$, и, следовательно, $\overline{K} = \overline{K}_2$.

Количество движения ротора находим по формуле (173), т. е. $\overline{K}_2 = \frac{P_2}{g}\overline{v}_2$, где $\overline{v}_2$ — скорость точки C_2. Следовательно, $\overline{K} = \frac{P_2}{g}\overline{v}_2$. Отсюда находим проекции количества движения данной системы на координатные оси: $K_x = \frac{P_2}{g} v_{2_x}$, $K_y = \frac{P_2}{g} v_{2_y}$.

Применяя теперь теорему о количестве движения системы [уравнения (171)], получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X^{(e)}, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y^{(e)},$$

или

$$\frac{P_2}{g}\frac{dv_{2_x}}{dt} = X_A + X_B, \quad \frac{P_2}{g}\frac{dv_{2_y}}{dt} = Y_A + Y_B - (P_1 + P_2). \qquad (a)$$

Скорость центра тяжести C_2 ротора перпендикулярна к радиусу OC_2 и по модулю равна $v_2 = OC_2 \cdot \omega = e \cdot \omega$, где $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi \cdot t$ — угловая скорость ротора.

Следовательно, $v_{2_x} = v_2 \cdot \cos\varphi = e\omega \cdot \cos\varphi$; $v_{2y} = -v_2 \sin\varphi = -e\omega \sin\varphi$. Поэтому уравнения (*a*) принимают вид:

$$X_A + X_B = \frac{eP_2}{g}\frac{d}{dt}(\omega\cos\varphi) = \frac{eP_2}{g}\left(\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - \omega\cdot\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{eP_2}{g}\cdot\left(\frac{d\omega}{dt}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi\right).$$

$$Y_A+Y_B=P_1+P_2-\frac{eP_2}{g}\frac{d(\omega\sin\varphi)}{dt}=P_1+P_2-\frac{eP_2}{g}\left(\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi+\right.$$
$$\left.+\omega\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)=P_1+P_2-\frac{eP_2}{g}\cdot\left(\frac{d\omega}{dt}\sin\varphi+\omega^2\cos\varphi\right).$$

В момент $t=1\ сек$ имеем: $\varphi=\frac{\pi t^2}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi=1$, $\cos\varphi=0$, $\omega=\pi t=\pi$; поэтому в этот момент $X_A+X_B=-\frac{eP_2}{g}\pi^2$, Y_A+ $+Y_B=P_1+P_2-\frac{eP_2}{g}\frac{d\omega}{dt}=P_1+P_2-e\pi\frac{P_2}{g}$.

Таким образом, полное вертикальное давление на фундамент в момент $t=1\ сек$ равно $P_1+P_2-e\pi\frac{P_2}{g}$, а общее горизонтальное усилие, приходящееся на все болты, равно $\frac{eP_2}{g}\pi^2$.

Второй способ. Применяя теорему о движении центра масс системы [уравнения (174′)], имеем: $M\ddot{x}_C=X_A+X_B$, $M\ddot{y}_C=Y_A+$ $+Y_B-P_1-P_2$, где x_C и y_C — координаты центра тяжести данной системы, состоящей из корпуса мотора с центром тяжести в точке O и из ротора с центром тяжести в точке C_2. По формулам (172′) находим:

$$Mx_C=\frac{P_1}{g}x_0+\frac{P_2}{g}x_{C_2} \text{ и } My_C=\frac{P_1}{g}y_0+\frac{P_2}{g}y_{C_2}.$$

Но
$$x_0=y_0=0,\ x_{C_2}=OC\cdot\sin\varphi=e\cdot\sin\varphi.$$
$$y_{C_2}=OC_2\cdot\cos\varphi=e\cos\varphi,$$

а потому

$$Mx_C=\frac{P_2}{g}e\sin\varphi,\quad My_C=\frac{P_2}{g}e\cos\varphi.$$

Отсюда:
$$M\dot{x}_C=\frac{P_2}{g}e\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\frac{P_2}{g}e\omega\cos\varphi,$$

$$M\dot{y}_C=-\frac{P_2}{g}e\sin\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{P_2}{g}e\omega\sin\varphi,$$

$$M\ddot{x}_C=\frac{eP_2}{g}\cdot\frac{d}{dt}(\omega\cos\varphi),\quad M\ddot{y}_C=-\frac{eP_2}{g}\frac{d}{dt}(\omega\sin\varphi).$$

Следовательно,

$$X_A+X_B=\frac{eP_2}{g}\frac{d}{dt}(\omega\cos\varphi),\quad Y_A+Y_B=P_1+P_2-$$
$$-\frac{eP_2}{g}\frac{d}{dt}(\omega\sin\varphi).$$

Мы получили, таким образом, те же уравнения, как и при первом способе решения. Из этих уравнений так же, как указано выше, получим тот же результат

§ 2. Теорема о кинетическом моменте системы

Главный момент количеств движения всех материальных точек системы относительно данного центра или данной оси называется *кинетическим моментом* системы относительно этого центра или этой оси.

Следовательно, обозначая кинетический момент системы относительно точки O (начала координат) $\overline{L}_0$, а кинетические моменты системы относительно координатных осей L_x, L_y, L_z, будем иметь:

$$\overline{L}_0 = \sum \overline{m}_0 (m\overline{v}) \ldots . \tag{179}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum m_x (m\overline{v}) = \sum (ymv_z - zmv_y) = \sum m (y\dot{z} - z\dot{y}), \\ L_y &= \sum m_y (m\overline{v}) = \sum (zmv_x - xmv_z) = \sum m (z\dot{x} - x\dot{z}), \\ L_z &= \sum m_z (m\overline{v}) = \sum (xmv_y - ymv_x) = \sum m (x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

Теорема о кинетическом моменте системы состоит в следующем.

Производная по времени от кинетического момента системы относительно данного неподвижного центра или данной неподвижной оси равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к этой системе, относительно того же центра или той же оси, т. е.

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \overline{M}_O^{(e)} = \sum \overline{m}_O (\overline{F}^{(e)}). \tag{181}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^{(e)} = \sum m_x (\overline{F}^{(e)}), \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^{(e)} = \sum m_y (\overline{F}^{(e)}), \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^{(e)} = \sum m_z (\overline{F}^{(e)}). \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

Следствие. *Если главный момент всех внешних сил относительно неподвижного центра O или данной оси z равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра или этой оси остается неизменным,* т. е.

1) если $\overline{M}_O^{(e)} = 0$, то $\overline{L}_O = \text{const}$, (183)

2) если $M_z^{(e)} = 0$, то $L_z = \text{const}$. (183′)

При *поступательном* движении твердого тела его кинетический момент относительно любой оси z равен моменту относительно той же оси количества движения центра масс этого тела в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса M тела, т. е.

$$L_z = m_z (M\overline{v}_C). \tag{184}$$

Если твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω, то его кинетический момент относительно этой оси

равен произведению момента инерции этого тела относительно оси вращения на угловую скорость, т. е.

$$L_z = I_z \cdot \omega. \qquad (185)$$

При этом моментом инерции тела относительно данной оси z называется сумма произведений массы каждой элементарной частицы тела на квадрат ее расстояния до этой оси, т. е.

$$I_z = \sum mr^2, \qquad (186)$$

где m — масса элементарной частицы, а r — расстояние до оси z.

Если твердое тело движется параллельно данной неподвижной плоскости, то его кинетический момент относительно любой оси z, перпендикулярной к этой плоскости, равен моменту относительно оси z количества движения центра масс C этого тела в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса M тела плюс кинетический момент тела относительно оси Cz' в его вращательном движении вокруг этой оси, причем ось Cz' проходит через центр масс тела и параллельна оси z, т. е.

$$L_z = m_z(M\bar{v}_C) + I_{Cz'} \cdot \omega. \qquad (187)$$

Здесь $I_{Cz'}$ — момент инерции тела относительно оси Cz', ω — *алгебраическое* значение угловой скорости тела (положительное, если тело вращается вокруг оси Cz' против часовой стрелки, и отрицательное в противном случае).

Из равенств (182) и (185) получаем дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\bar{F}^e), \qquad (188)$$

где $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение тела, $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующих четыре основных типа:

I. Задачи на вычисление кинетического момента системы.

II. Задачи, в которых рассматривается сохранение кинетического момента системы относительно неподвижного центра или неподвижной оси, т. е. используются равенства (183) или (183').

III. Задачи, относящиеся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси.

IV. Задачи, относящиеся к крутильным колебаниям.

V. Задачи на определение гироскопических реакций в случае гироскопа с двумя степенями свободы.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Задачи этого типа можно решить при помощи общих формул (179) или (180).

Кинетический момент твердого тела следует вычислять в зависимости от вида движения тела по формулам (184), (185) или (187).

Пример 155

Механизм эллипсографа состоит из ползунов A и B весом P каждый, кривошипа OC весом P и линейки AB весом $2P$. Кривошип OC вращается вокруг неподвижной оси Oz, перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω.

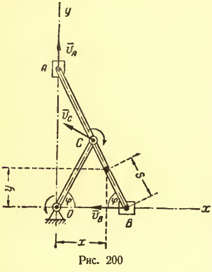


Рис. 200

Найти кинетический момент этой системы относительно оси Oz, рассматривая линейку AB и кривошип OC как однородные тонкие стержни, а ползуны A и B — как материальные точки, если $OC = AC = CB = l$ (рис. 200).

Решение

Первый способ. Данный механизм состоит из четырех тел: кривошипа OC, линейки AB и ползунов A и B, а потому искомый кинетический момент равен

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} + L_z^{(3)} + L_z^{(4)},$$

где $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$, $L_z^{(3)}$, $L_z^{(4)}$ — соответственно кинетические моменты кривошипа, линейки и ползунов A и B относительно оси z.

Кинетический момент кривошипа OC находим по формуле (185) $L_z^{(1)} = I_z^{(1)}\cdot\omega$, где $I_z^{(1)}$ — момент инерции кривошипа относительно оси z, равный $L_z^{(1)} = \frac{M_1 l^2}{3} = \frac{P}{g}\cdot\frac{l^2}{3}$; следовательно, $I_z^{(1)} = \frac{P}{3g} l^2\omega$.

Так как скорости ползунов A и B направлены соответственно вдоль осей Ox и Oy и, следовательно, пересекают ось Oz, то $L_z^{(3)} = L_z^{(4)} = 0$.

Чтобы вычислить кинетический момент $L_z^{(2)}$ линейки, применим последнюю из формул (180).

Разобьем стержень AB на бесконечно малые элементы (материальные частицы); массу такого элемента обозначим m, а его координаты — x и y. Тогда: $x = (2l - s)\cos\varphi$; $y = s\cdot\sin\varphi$, где s — расстояние рассматриваемого элемента от точки B. Отсюда $\dot{x} = -(2l - s)\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -(2l - s)\sin\varphi\cdot\omega$; $\dot{y} = s\cos\varphi\cdot\omega$. Следо-

вательно, момент количества движения элемента относительно оси z будет

$$m_z(m\bar{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\cdot[(2l - s)\, s\omega \cos^2\varphi + (2l - s)\, s\omega \sin^2\varphi] = m(2l - s)\, s\omega;$$

а поэтому $L_z^{(2)} = \sum m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \sum m(2l - s)\, s\omega = \omega\,(2l\sum ms - \sum ms^2)$, но $\sum ms = M_2 s_C = \frac{2P}{g}\, l$, а $\sum ms^2$ — момент инерции стержня AB относительно точки B, равный $M_2 \frac{AB^2}{3} = \frac{8P}{3g}\, l^2$. Следовательно, $L_z^{(2)} = \omega\left(\frac{4P}{g}\, l^2 - \frac{8P}{3g}\, l^2\right) = \frac{4P}{3g}\, l^2\omega$.

Таким образом, искомый кинетический момент механизма будет

$$L_z = \frac{P}{3g}\, l^2\omega + \frac{4P}{3g}\, l^2\omega = \frac{5P}{3g}\, l^2\omega.$$

Второй способ. Так как движение стержня AB является плоскопараллельным, то его кинетический момент относительно оси z можно найти проще, применяя формулу (187):

$$L_z^{(2)} = m_z(M_2\bar{v}_C) + I_C^{(2)}\omega_1;$$

здесь $I_C^{(2)}$ — момент инерции стержня AB относительно оси, проходящей через его центр тяжести C и перпендикулярной к плоскости xOy (относительно точки C), ω_1 — угловая скорость вращения стержня вокруг этой оси (вокруг точки C).

Следовательно, $I_C^{(2)} = M_2 \frac{AB^2}{12} = \frac{M_2 l^2}{3}$. Так как стержень AB вращается вокруг точки C *по часовой стрелке*, то $\omega_1 = -\frac{d\varphi}{dt} = -\omega$. Так как точка C принадлежит и кривошипу OC, то ее скорость $\bar{v}_C$ перпендикулярна к OC и $v_C = l\omega$, поэтому $m_z(M_2\bar{v}_C) = M_2 l^2\omega$. Следовательно, $L_z^{(2)} = M_2 l^2\omega - \frac{M_2 l^2\omega}{3} = \frac{2}{3} M_2 l^2\omega = \frac{4P}{3g}\, l^2\omega$ и $L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = \frac{P}{3g}\, l^2\omega + \frac{4P}{3g}\, l^2\omega = \frac{5P}{3g}\, l^2\omega$.

ЗАДАЧИ ТИПА II

К задачам типа II, как было указано выше, относятся такие задачи, в которых сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно данной неподвижной оси, например оси z, равна нулю. В этом случае (см. равенство 183') имеем: $L_z = \Sigma m_z(m\bar{v}) = \text{const}$. Следовательно, если обозначим $L_z^{(0)}$ кинетический момент системы относительно оси z в начальный момент при $t = 0$, то в рассматриваемом случае будем иметь:

$$L_z = L_z^{(0)}, \text{ или } \Sigma m_z(m\bar{v}) = \Sigma m_z\,(m\bar{v}_0). \qquad (189)$$

Если в начальный момент система неподвижна, начальные скорости всех ее точек равны нулю, следовательно, $L_z^{(0)}=0$, и в этом случае

$$L_z = \Sigma m_z(m\overline{v}) = 0. \qquad (189')$$

При решении задач второго типа нужно составить уравнение (189) или уравнение (189') и определить из него ту величину, которую требуется найти в данной задаче.

Пример 156

На поверхности круглого однородного цилиндра радиусом r и массой M, который может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси z, имеется канал в форме винтовой линии; в этом канале находится шарик (материальная точка) массой m. В некоторый момент, когда система неподвижна, шарик начинает двигаться по винтовой линии под действием силы тяжести, а цилиндр начинает при этом вращаться вокруг оси z в противоположном направлении. На какой угол повернется цилиндр за то время, в течение которого шарик опустится на расстояние, равное шагу h винтовой линии (рис. 201).

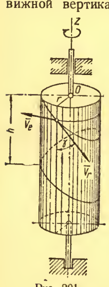


Рис. 201

Решение

Внешними силами для данной системы, состоящей из цилиндра и шарика, являются их веса и реакции закрепленных точек, через которые проходит ось вращения цилиндра z. Так как моменты этих сил относительно оси z равны нулю и в начальный момент система неподвижна, то применяется уравнение (189'), т. е. $L_z=0$, где L_z—кинетический момент данной системы относительно оси z. Этим уравнением и воспользуемся для решения задачи.

Кинетический момент вращающегося цилиндра относительно оси вращения z будет $-I_z\omega = -\frac{Mr^2}{2}\omega$, где ω—угловая скорость цилиндра (знак минус берем потому, что цилиндр вращается по часовой стрелке, если смотреть с положительного конца оси z).

Если относительную скорость шарика, направленную по касательной к винтовой линии, обозначим $\overline{v}_r$, а постоянный угол этой скорости с осью z через γ, то горизонтальная составляющая относительной скорости, направленная по касательной к цилиндру, по модулю будет равна $v_r \cdot \sin\gamma$. Переносная скорость

$\bar{v}_e$ шарика (скорость во вращательном движении вокруг оси z) направлена противоположно горизонтальной составляющей относительной скорости и по модулю равна $r\omega$. Поэтому горизонтальная составляющая абсолютной скорости шарика равна

$$v_r \sin\gamma - r\omega,$$

а момент количества движения шарика относительно оси z будет равен $m(v_r \sin\gamma - r\omega)r$,
следовательно,

$$L_z = -\frac{Mr^2\omega}{2} + mr(v_r \sin\gamma - r\omega);$$

так как $L_z = 0$, то

$$-\frac{Mr^2\omega}{2} + m(v_r \sin\gamma - r\omega)r = 0$$

или

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r\omega = mv_r \sin\gamma. \qquad \text{(a)}$$

Если угол поворота цилиндра обозначим φ, то

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

проекция v_z абсолютной скорости шарика на ось z, очевидно, равна $-v_r \cos\gamma$, а потому

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -v_r \cos\gamma \text{ и}$$

$$v_r \sin\gamma = v_r \cos\gamma \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно, уравнение (*a*) принимает вид:

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r \frac{d\varphi}{dt} = -m \operatorname{tg}\gamma \frac{dz}{dt},$$

или

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r\,d\varphi = -m \operatorname{tg}\gamma\, dz.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание, что в начальный момент $\varphi_0 = 0$ и $z_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{M}{2} + m\right) r\varphi = -m \operatorname{tg}\gamma\, z.$$

Полагая по условию задачи $z = -h$, находим искомый угол поворота цилиндра:

$$\varphi = \frac{m \operatorname{tg}\gamma\, h}{\left(\frac{M}{2} + m\right) r}.$$

Так как между углом наклона γ винтовой линии и ее шагом h имеется зависимость $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\pi r}{h}$, то $\varphi = \frac{2\pi m}{\frac{M}{2} + m}$.

Если, например, $M = 6m$, то цилиндр повернется на 90°.

ЗАДАЧИ ТИПА III

В зависимости от внешних сил, приложенных к вращающемуся твердому телу, задачи типа III можно разделить на три группы.

1. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения есть величина постоянная.

2. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения зависит от угловой скорости тела.

Этот случай возможен при вращении тела в сопротивляющейся среде.

3. Главный момент приложенных к телу сил относительно оси вращения есть функция угла φ поворота тела, как, например, это бывает в случае движения физического маятника.

Первая группа

Для решения этих задач нужно составить и затем проинтегрировать дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела [уравнение (188)].

Пример 157

Сплошной цилиндр радиусом r, положенный, как указано на рис. 202, на цилиндрические ролики A и B, вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг своей горизонтальной оси O. В некоторый момент ролики затормаживаются. Через сколько времени после этого цилиндр остановится, если коэффициент трения между цилиндром и роликами равен f, а $\angle AOB = 2\alpha$ (рис. 202).

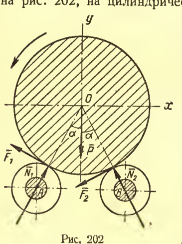


Рис. 202

Решение

Внешними силами, приложенными к вращающемуся цилиндру, являются его вес $\overline{P}$, нормальные реакции $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ роликов и силы трения $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ между цилиндром и роликами, причем $F_1 = fN_1$ и $F_2 = f \cdot N_2$. Так

как моменты сил $\overline{P}$, $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ относительно оси вращения O цилиндра равны нулю, то главный момент внешних сил относительно этой оси $M_0 = -F_1 r - F_2 r = -fr(N_1 + N_2)$, поэтому дифференциальное уравнение вращательного движения цилиндра имеет вид:

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -fr(N_1 + N_2).$$

Найдем теперь силы N_1 и N_2; для этого, применяя теорему о движении центра масс системы, составим дифференциальные уравнения движения центра тяжести O цилиндра:

$$M\ddot{y}_C = \Sigma Y^{(e)} = -P + (N_1 + N_2)\cos\alpha - F_2 \sin\alpha + F_1 \sin\alpha,$$
$$M\ddot{x}_C = \Sigma X^{(e)} = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha - F_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha.$$

Так как точка O неподвижна, то $\ddot{x}_C = \ddot{y}_C = 0$, а потому

$$\left.\begin{aligned} (N_1 - N_2)\sin\alpha - f(N_1 + N_2)\cos\alpha = 0, \\ (N_1 + N_2)\cos\alpha + f(N_1 - N_2)\sin\alpha = P. \end{aligned}\right\}$$

Исключая из этих уравнений разность $N_1 - N_2$, получим:

$$N_1 + N_2 = \frac{P}{(1 + f^2)\cos\alpha},$$

и, следовательно,

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{frP}{(1 + f^2)\cos\alpha}.$$

Но для цилиндра $J_0 = \frac{P}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$, а потому

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2gf}{(1 + f^2)\, r \cos\alpha} = \text{const}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\omega - \omega_0 = -\frac{2gf}{(1 + f^2)\, r\cos\alpha}\, t.$$

Так как в момент остановки цилиндра $\omega = 0$, то искомое время равно

$$t = \frac{(1 + f^2)\, r \cos\alpha \cdot \omega_0}{2gf}.$$

Вторая группа

При интегрировании дифференциального уравнения вращательного движения твердого тела в этих задачах нужно применить способ разделения переменных.

Пример 158

Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух полюсов, расположенных диаметрально противоположно и несущих на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи Фуко, индуцируемые в массе маховика, при его движении около полюсов создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости v на ободе маховика: $M_1 = kv$, где k — коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным: радиус маховика r; момент инерции его относительно оси вращения J. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.

Решение

Главный момент внешних сил, приложенных к маховику относительно его оси вращения, равен

$$M = -(M_1 + M_2) = -(kv + M_2),$$

поэтому, составляя для маховика уравнение (188),

будем иметь: $$J\frac{d\omega}{dt} = -(kv + M_2),$$

или, заменяя v на $r\omega$,

$$J\frac{d\omega}{dt} = -(kr\omega + M_2).$$

Разделяя здесь переменные, получим:

$$\frac{Jd\omega}{M_2 + kr\omega} = -dt.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\frac{J}{kr}\left|\ln(M_2 + kr\omega)\right|_{\omega_0}^{0} = -t$$

или

$$t = \frac{J}{kr}\ln\frac{M_2 + kr\omega_0}{M_2} = \frac{J}{kr}\ln\left(1 + \frac{kr}{M_2}\omega_0\right).$$

Третья группа

В этих задачах главный момент внешних сил, приложенных к вращающемуся твердому телу, является функцией угла поворота φ этого тела, т. е. $M = f(\varphi)$. Если в уравнении (188) угловую скорость ω заменить производной $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$, то это уравнение принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = M = f(\varphi).$$

При решении задач третьей группы нужно проинтегрировать это уравнение.

Пример 159

Однородный круглый диск радиусом r совершает колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O, причем расстояние от точки O до центра тяжести C диска равно $\frac{r}{2}$.

Найти закон движения диска при **малых** колебаниях, а также период этих колебаний. В начальный момент угол φ отклонения диска от равновесного положения равен φ_0, а его начальная угловая скорость равна нулю (рис. 203).

Рис. 203

Решение

В данной задаче рассматривается физический маятник. Если вес маятника обозначим P, а расстояние $OC - a$, то $m_0(\bar{P}) = -aP\sin\varphi$; а поэтому дифференциальное уравнение вращательного движения маятника имеет вид:

$$J_0\ddot{\varphi} = -aP\sin\varphi.$$

При *малых* колебаниях можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогда получим дифференциальное уравнение малых колебаний маятника $J_0\ddot{\varphi} + aP\varphi = 0$ или $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $k^2 = \frac{aP}{J_0}$.

Мы получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний; его общее решение имеет вид: $\varphi = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt)$.

Отсюда: $\dot{\varphi} = kC_1\cos(kt) - kC_2\sin kt$.

Так как в начальный момент по условию задачи $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, то из этих уравнений, полагая в них $t = 0$, находим $C_2 = \varphi_0$, $C_1 = 0$. Следовательно, $\varphi = \varphi_0\cos kt$. Это уравнение выражает искомый закон движения маятника при малых колебаниях. Период этих колебаний равен $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{aP}}$. В данной задаче $a = \frac{r}{2}$ — момент инерции диска находим по теореме о моментах инерции относительно параллельных осей:

$$J_O = J_C + M\,OC^2 = \frac{Mr^2}{2} + M\frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}Mr^2 = \frac{3P}{4g}r^2.$$

Поэтому $k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$, $\varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3r}}\,t\right)$,

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Сравнивая последнюю из этих формул с периодом колебаний математического маятника $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина нити маятника, видим, что приведенная длина рассматриваемого физического маятника равна

$$l=\frac{3}{2}r.$$

ЗАДАЧИ ТИПА IV

Задачи этого типа, относящиеся к крутильным колебаниям, можно разделить на три группы:

1) свободные крутильные колебания;
2) затухающие крутильные колебания;
3) вынужденные крутильные колебания.

При решении всех этих задач следует составить дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела (уравнение 188) и затем это уравнение проинтегрировать.

Первая группа

В задачах этой группы приложенный к телу момент пропорционален углу φ, определяющему положение вращающегося тела, и имеет противоположный знак, т. е. $M=-c\varphi$, где c — коэффициент пропорциональности. Следовательно, уравнение (188) получаем

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}+c\varphi=0, \text{ или } \ddot{\varphi}+k^2\varphi=0, \text{ где } k^2=\frac{c}{J}$$

— дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решение которого рассмотрено в главе II.
По формулам (105) и (106) находим:

$$\varphi=\varphi_0\cos(kt)+\frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin(kt)$$

или

$$\varphi=\varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{c}{J}}\,t\right)+\frac{\dot{\varphi}_0}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{J}}\,t\right).$$

Период этих гармонических колебаний будет

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}.$$

Вторая группа

В задачах этой группы к вращающемуся телу, кроме момента $M = -c\varphi$, приложен еще момент сопротивления, пропорциональный угловой скорости тела, т. е. момент $M_1 = -\mu\dot{\varphi}$, где μ — коэффициент пропорциональности.

Поэтому уравнение (188) имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi - \mu\dot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J}\varphi + \frac{\mu}{J}\dot{\varphi} = 0,$$

т. е. $\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $2n = \frac{\mu}{J}$ и $k^2 = \frac{c}{J}$.

Мы получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний (при $k > n$), решение которого находим по формулам (111) и (112): $\varphi = ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha)$,
или

$$\varphi = ae^{-\frac{\mu}{2J}t}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{J} - \frac{\mu^2}{4J^2}}\,t + \alpha\right) =$$

$$= ae^{\frac{-\mu}{2J}t}\sin\left(\frac{1}{2J}\sqrt{4Jc - \mu^2}\,t + \alpha\right).$$

Период этих затухающих колебаний (см. формулу (113):

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{4\pi J}{\sqrt{4Jc - \mu^2}}.$$

Постоянные a и α определяются по начальным условиям движения тела (по начальному углу φ_0 и начальной угловой скорости $\dot{\varphi}_0$).

Третья группа

В этих задачах, кроме моментов $M = -c\varphi$ и $M_1 = -\mu\dot{\varphi}$, к вращающемуся телу приложен момент M_2, выражающийся периодической функцией времени, т. е. изменяющейся со временем, например по гармоническому закону (по закону синуса или косинуса).

Если $M_2 = H\sin(pt)$, где H и p — постоянные величины, то уравнение (188) будет иметь вид:

$$J\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + c\varphi = H\sin(pt),$$

или

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h\sin(pt),$$

где $2n = \frac{\mu}{J}$, $k^2 = \frac{c}{J}$ и $h = \frac{H}{J}$.

Здесь мы получили дифференциальное уравнение 2-го порядка с правой частью, отличной от нуля. Интегрирование такого уравнения рассмотрено в § 3 главы II; его общее решение имеет вид:

$$\varphi = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha) + b \sin(pt + \beta),$$

или

$$\varphi = ae^{-\frac{\mu}{2J}} \sin\left(\frac{1}{2J}\sqrt{4Jc - \mu^2}t + \alpha\right) + b \sin(pt + \beta).$$

Второй член в правой части этого равенства выражает вынужденные крутильные колебания. Амплитуда b и начальная фаза β этих вынужденных колебаний, согласно сказанному в § 3 главы II, определяются по формулам:

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{H}{J\sqrt{\left(\frac{c}{J} - p^2\right)^2 + \frac{\mu^2}{J^2}p^2}} =$$

$$= \frac{H}{\sqrt{(c - Jp^2)^2 + \mu^2 p^2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{2np}{k^2 - p^2} = -\frac{\mu p}{J\left(\frac{c}{J} - p^2\right)} = -\frac{\mu p}{c - Jp^2}.$$

Постоянные a и α определяются по начальным условиям вращательного движения тела.

При $p = k = \sqrt{\frac{c}{J}}$, т. е. при равенстве частот свободных гармонических и вынужденных колебаний, имеем явление резонанса. Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае будет

$$b_{рез} = \frac{H}{\mu p} = \frac{H}{\mu k} = \frac{H}{\mu}\sqrt{\frac{J}{c}}.$$

При отсутствии момента сопротивления нужно в уравнениях и формулах третьей группы задач положить $\mu = n = 0$. Тогда дифференциальное уравнение крутильных колебаний будет иметь вид: $J\ddot{\varphi} + c\varphi = H\sin(pt)$, а его общее решение:

$$\varphi = a\sin(kt + \alpha) + b\sin(pt),$$

или

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t + \alpha\right) + b\sin(pt).$$

Амплитуда вынужденных крутильных колебаний будет определяться по формуле $b = \frac{H}{c - Jp^2}$.

При $p = \sqrt{\frac{c}{J}}$, т. е. *в случае резонанса при отсутствии сопротивлений* общее решение предыдущего дифференциального

уравнения (закон вращательного движения тела) имеет вид:

$$\varphi = a\sin(kt+\alpha) - \frac{H}{2Jk}t\cos(kt)$$

или

$$\varphi = a\sin\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t+\alpha\right) - \frac{H}{2J}\sqrt{\frac{J}{c}}t\cos\left(\sqrt{\frac{c}{J}}t\right).$$

Постоянные a и α определяются, как и в предыдущем случае (при наличии сопротивления), по начальным условиям движения тела.

Пример 160

Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают колебания диска, подвешенного на упругой вертикальной проволоке в жидкости. К диску приложен переменный момент, равный $M'\sin(pt)$ $(M'=\text{const})$, *при котором наблюдается явление резонанса.* Момент сопротивления движению диска в жидкости равен $\mu' S\cdot\omega$, где μ' — коэффициент вязкости жидкости, S — сумма площадей верхнего и нижнего оснований диска, ω — его угловая скорость.

Определить коэффициент вязкости жидкости μ', если амплитуда вынужденных колебаний диска при резонансе равна φ'.

Решение

К диску, вращающемуся вокруг вертикальной оси, приложен момент M упругих сил, возникающий при закручивании проволоки на угол φ и пропорциональный этому углу, момент сопротивления жидкости $M_1=\mu' S\omega$ и переменный момент $M_2 = M'\sin(pt)$.

Поэтому в данном случае имеем:

$$\mu = \mu' S, \quad H = M'.$$

Так как по условию задачи при данной частоте p наблюдается резонанс, причем амплитуда вынужденных крутильных колебаний диска равна φ', то по вышеуказанной формуле $b_{рез}=\frac{H}{\mu p}$, находим $\varphi' = \frac{M'}{\mu' S p}$, откуда $\mu' = \frac{M'}{\varphi' S p}$.

ЗАДАЧИ ТИПА V

Представим себе движущееся твердое тело, одна точка O которого закреплена неподвижно, например, при помощи сферического шарнира (рис. 204). Как известно из кинематики, в каждый данный момент такое тело вращается вокруг некоторой определенной мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку O. Вектор мгновенной угловой скорости тела, направленный по мгно-

венной оси вращения, обозначим $\bar{\omega}$, а его проекции на координатные оси, начало которых находится в точке O, обозначим ω_x, ω_y, ω_z. Найдем кинетический момент этого тела относительно оси x.

Разбивая тело на элементарные частицы и применяя формулы (180), будем иметь:

$$L_x = \Sigma m_x (m\bar{v}) = \Sigma m (y v_z - z v_y),$$

где m — масса элементарной частицы, y и z — ее координаты, а v_y, v_z — проекции скорости частицы на оси y и z.

Рис. 204

Проекции на координатные оси скорости $\bar{v}$ точки вращающегося твердого тела определяются по кинематическим формулам Эйлера *:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Следовательно,

$$L_x = \Sigma m (\omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2) = \omega_x \times \\ \times \Sigma m (y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma mxy - \omega_z \Sigma mxz,$$

или

$$L_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z,$$

где $I_x = \Sigma m (y^2 + z^2)$ — момент инерции тела относительно оси x, $I_{xy} = \Sigma mxy$ и $I_{xz} = \Sigma mxz$ — центробежные моменты инерции тела.

Если координатные оси x, y, z направим по главным осям данного тела в точке O, то $I_{xy} = I_{xz} = 0$, а потому в этом случае $L_x = I_x \omega_x$.

Аналогично найдем, что при этом условии кинетические моменты тела относительно осей y и z будут равны:

$$L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z.$$

Предположим теперь, что твердое тело, имеющее форму тела вращения вокруг оси AB, например, колесо или тор, равномерно вращается вокруг этой оси AB с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$; в то же время эта горизонтальная ось AB вращается равномерно вокруг неподвижной вертикальной оси z с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Требуется определить реакции в подшипниках A и B, перпендикулярные к оси AB, если вес тела равен P и $AC = l_1$, $CB = l_2$, $AB = l_1 + l_2 = l$, причем C — центр тяжести данного тела (рис. 205, *а* и *б*). Такое тело представляет собой гироскоп с двумя степенями свободы.

Вращение вокруг оси AB с угловой скоростью $\bar{\omega}_1$ называется собственным вращением гироскопа, а вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$ вокруг оси z называется прецессионным вращением,

* Вывод этих формул можно найти, например, в курсе теоретической механики проф. И. М. Воронкова.

или прецессией гироскопа. Неподвижную точку пересечения осей вращения принимаем за начало координат O и направим координатные оси, как указано на рис. 205, *а*. Горизонтальные реакции подшипников A и B, параллельные оси AB, обозначим $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$; вертикальные статические реакции подшипников, обусловленные только весом P гироскопа, обозначим $\overline{Z}'_A$ и $\overline{Z}'_B$, причем очевидно $Z'_A = \frac{Pl_2}{l}$ и $Z'_B = \frac{P}{l} l_1$, а динамические вертикальные реакции обозначим $\overline{Z}''_A$ и $\overline{Z}''_B$.

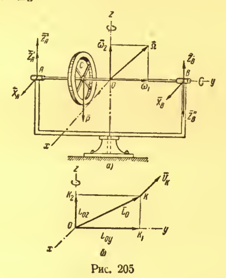


Рис. 205

Найдем кинетический момент L_0 гироскопа относительно неподвижной точки O. Сложив векторы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, получим абсолютную мгновенную угловую скорость гироскопа $\overline{\Omega}$ [см. равенство 93]. Так как гироскоп есть тело вращения вокруг оси y, то эта ось и две перпендикулярные к ней оси x и z являются главными осями инерции гироскопа в точке O, а потому, как было указано выше, кинетические моменты гироскопа относительно этих осей будут:

$$L_x = I_x \Omega_x, \quad L_y = I_y \Omega_y, \quad L_z = I_z \Omega_z,$$

или, так как $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \omega_1$, $\Omega_z = \omega_2$, то $L_x = 0$,

$$L_y = I_y \omega_1, \quad L_z = I_z \omega_2.$$

Учитывая, что L_x, L_y, L_z являются проекциями вектора $\overline{L}_0$ на координатные оси, по найденным проекциям строим вектор $\overline{OK} = \overline{L}_0$ (рис. 205, *б*).

Применяя теперь теорему о кинетическом моменте системы относительно неподвижной точки O (см. уравнение 181), будем иметь: $\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \overline{M}_0^e$.

Так как производная $\frac{d\overline{L}_0}{dt}$ есть скорость $\overline{v}_\kappa$ точки K, то

$$\overline{v}_\kappa = \overline{M}_0^e. \tag{190}$$

Это равенство выражает теорему Резаля, т. е. скорость, с которой перемещается конец вектора, изображающего кинетический момент системы относительно неподвижной точки O, равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно той же точки.

Так как $L_y = \text{const}$ и $L_z = \text{const}$, то вектор $\overline{OK}$ описывает круглый конус, вращаясь вокруг оси z с угловой скоростью $\overline{\omega}_2$. Отсюда следует, что вращательная скорость v_K точки K направлена параллельно оси x, как показано на рис. 205, *б* и по модулю равна:

$$v_\kappa = \omega_2 \cdot K_2K = \omega_2 L_y = I_y \omega_1 \omega_2.$$

Применяя затем теорему о движении центра тяжести системы (см. уравнение 174), будем иметь: $M\overline{w}_c = \overline{R}^{(e)}$, где $\overline{R}^e$ — главный вектор внешних сил, которыми в данной задаче являются вес $\overline{P}$ и искомые реакции подшипников A и B. Проектируя это векторное равенство и равенство (190) на оси x и z и учитывая, что силы $\overline{P}$, $\overline{Z}'_A$ и $\overline{Z}'_B$ взаимно уравновешиваются, получим четыре уравнения:

1) $Mw_{Cx} = R_x^{(e)} = X_A + X_B$,

2) $Mw_{Cz} = R_z^{(e)} = Z''_A - Z''_B$,

3) $v_{\kappa x} = M_{Ox}^{(e)} = -Z''_A \cdot AO - Z''_B \cdot OB$,

4) $v_{\kappa z} = M_{Oz}^{(e)} = X_A \cdot AO - X_B \cdot OB$.

Так как скорость $\overline{v}_K$ параллельна оси x, а центростремительное ускорение точки C направлено по оси y (от C к O), то $v_{\kappa x} = -I_y \omega_1 \omega_2$, $v_{Kz} = 0$, $w_{Cx} = w_{Cz} = 0$. Поэтому предыдущие уравнения принимают вид:

$$X_A + X_B = 0,\ Z''_A - Z''_B = 0,\ Z''_A\, AO + Z''_B\, OB = I_y \omega_1 \omega_2,$$
$$X_A\, AO - X_B\, OB = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$X_A = X_B = 0,\ Z''_A = Z''_B = \frac{I_y \omega_1 \omega_2}{l}.$$

Так как динамические реакции Z''_A и Z''_B равны по модулю и направлены противоположно, то они образуют пару с моментом,

равным $I_y\omega_1\omega_2$, называемым гироскопическим моментом. Следовательно, обозначая этот момент $M_г$, имеем:

$$M_г = I_y\omega_1\omega_2. \qquad (191)$$

Эта пара лежит в плоскости, в которой расположены векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$. Учитывая направления векторов $\bar{v}_к, \bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$, получаем векторное равенство:

$$\bar{v}_к = \bar{M}_г = I_y\,\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2. \qquad (191')$$

Возникновения реакций Z''_A и Z''_B, а также гироскопического момента, обусловленные изменением направления оси AB собственного вращения гироскопа, называются **гироскопическим эффектом**.

Пример 161

Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна, делает 300 оборотов в минуту; вес вращающихся частей равен 20 *т*, а их радиус инерции относительно оси вращения турбины равен 1,5 *м*. Определить гироскопические давления на подшипники, расстояние между которыми $l = 6$ *м*, если судно поворачивается вокруг вертикальной оси на 15° в *сек*.

Решение

Обозначая угловую скорость вращения судна вокруг вертикальной оси z через ω_2, а угловую скорость вращения турбины вокруг горизонтальной оси y через ω_1, имеем:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 10\pi \ 1/сек, \quad \omega_2 = \frac{2\pi \cdot 15}{360} = \frac{\pi}{12} \ 1/сек.$$

По формуле (191) находим гироскопический момент $M_г = I_y\omega_1\omega_2$, но

$$I_y = \frac{P}{g} r^2_{ин},$$

где P — вес вращающихся частей турбины и $r_{ин}$ — их радиус инерции; поэтому $M_г = \frac{P}{g} r^2_{ин} \cdot \omega_1\omega_2 = \frac{20\,000}{9{,}8} \cdot 2{,}25 \cdot \frac{10}{12}\pi^2 = 37500$ *кГм*.

Искомые гироскопические давления образуют пару сил, лежащую в вертикальной плоскости, причем момент этой пары $M_г$, а ее плечо равно l, следовательно, вертикальное гироскопическое давление на каждый подшипник

$$\frac{M_г}{l} = \frac{37500}{6} = 6250 \ кГ.$$

Пример 162

С концом вертикального вала OO_1 шарнирно соединен горизонтальный стержень OC, на который свободно насажен массивный цилиндрический каток (бегун). При вращении вала OO_1 вок-

руг вертикальной оси z бегун катится без скольжения по горизонтальной плоскости, на которую закладывается измельчаемый материал (рис. 206, *а* и *б*). Определить гироскопические реакции в точках O и A, а также усилие в стержне OC, если заданы вес бегуна P, длина $OC = l$, радиус бегуна R и угловая скорость вала $\omega = \text{const}$.

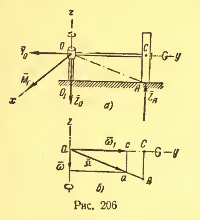


Рис. 206

Решение.

Обозначим угловую скорость собственного вращения бегуна вокруг оси OC через ω_1. Так как качение бегуна по горизонтальной плоскости происходит без скольжения, то скорость точки A равна нулю; поэтому мгновенная ось вращения бегуна проходит через точки O и A, а его абсолютная угловая скорость $\bar{\Omega}$ направлена по прямой OA, причем $\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}$.

Построив параллелограмм угловых скоростей, из подобных треугольников OAC и Oac имеем:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{AC}{OC} = \frac{R}{l}, \text{ откуда } \omega_1 = \omega \frac{l}{R}.$$

Теперь по формуле (191) находим гироскопический момент:

$$M_z = I_y \omega_1 \omega.$$

Рассматривая бегун как однородный цилиндр, имеем: $I_y = \frac{PR^2}{2g}$ и, следовательно,

$$M_z = \frac{PR^2}{2g} \omega^2 \frac{l}{R} = \frac{PR\omega^2 l}{2g}.$$

Гироскопические реакции Z_O и Z_A в точках O и A образуют пару сил, момент которой равен M_z и направлен, согласно формуле (191′), по оси x, как указано на рис. 206, *а*. Отсюда следует, что, во-первых, силы $\bar{Z}_A$ и $\bar{Z}_O$ имеют направления, указанные на рис. 206, *а*, и, во-вторых,

$$Z_A = Z_O = \frac{M_z}{l} = \frac{PR}{2g} \omega^2.$$

Таким образом, полное давление бегуна на горизонтальную плоскость в точке A равно сумме двух сил: веса P и гироскопического давления, равного Z_A, т. е.

$$P + \frac{PR}{2g} \omega^2 = P\left(1 + \frac{R\omega^2}{2g}\right).$$

Таблица 16

Классификация задач

Группы	Типы задач				
	I задачи на вычисление кинетического момента системы (задача 981)	II задачи, в которых имеет место сохранение кинетического момента системы (задачи 982—989)	III задачи, относящиеся к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси	IV задачи, относящиеся к крутильным колебаниям	V задачи на определение гироскопических реакций (задачи 1029—1036)
1-ая	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения есть величина постоянная. (задачи 990—992)	Свободные крутильные колебания (задачи 1014—1017, 1022, 1023)	—
2-ая	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения зависит от угловой скорости. (задачи 993—999)	Затухающие крутильные колебания (задачи 1019, 1020, 1025)	—
3-я	—	—	Главный момент приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения есть функция угла поворота тела. (задачи 1003—1013)	Вынужденные крутильные колебания (задачи 1021, 1024)	—

Центростремительное ускорение центра тяжести C бегуна направлено вдоль оси y от C к O и по модулю равно $w_c = l\omega^2$. Поэтому, применяя теорему о движении центра тяжести системы, получим:

$$\frac{P}{g} w_{cy} = Y_0,$$

где Y_0 — реакция точки O по направлению оси y. Отсюда $Y_0 = \frac{P}{g} l\omega^2$. Растягивающее усилие в стержне OC, очевидно, равно этой реакции Y_0.

§ 3. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией, или живой силой системы, называется сумма живых сил всех материальных точек этой системы, т. е.

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}, \tag{192}$$

где T — кинетическая энергия системы, m и v — масса и скорость материальной точки, принадлежащей данной системе.

Теорему об изменении кинетической энергии системы можно выразить в трех видах:

$$1)\ dT = \sum dA, \tag{193}$$

т. е. *дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему.*

$$2)\ \frac{dT}{dt} = \sum N, \tag{194}$$

т. е. *производная по времени от кинетической энергии системы равна мощности всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему.*

$$3)\ T - T_0 = \sum A, \tag{195}$$

т. е. *при перемещении системы из одного положения в другое изменение ее кинетической энергии равно сумме работ на этом перемещении всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему.*

Равенство (193) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме, а равенство (195) — ту же теорему в конечной форме. Равенство (194) выражает теорему о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил. Следует иметь в виду, что только в случае, когда имеется неизменяемая система (абсо-

лютно твердое тело), сумма работ всех внутренних сил на любом перемещении системы равна нулю.

Поэтому только в случае применения теоремы об изменении кинетической энергии системы внутренние силы учитываются.

В случае *стационарных связей без трения реакции таких связей не производят работы* (сумма работ реакций при перемещении системы равна нулю). Поэтому в данном случае реакции связей не входят ни в одно из равенств (193), (194) и (195).

При вычислении работы и мощности сил, действующих на данную систему, следует пользоваться формулами и указаниями, приведенными в § 3 главы III.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на следующих два основные типа:

I. Задачи на вычисление кинетической энергии системы (задачи 1040—1048).

II. Задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы, состоящей из одного тела или из нескольких тел.

ЗАДАЧИ ТИПА I

При решении задач этого типа необходимо иметь в виду следующее:

а) если тело, принадлежащее данной системе, движется поступательно, то его кинетическая энергия равна

$$T = M\frac{v_C^2}{2}, \tag{196}$$

где M — масса тела, v_C — скорость его центра тяжести (или любой другой его точки, так как при поступательном движении тела скорости всех его точек равны);

б) если тело вращается вокруг данной оси, то его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = I\frac{\omega^2}{2}, \tag{197}$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, ω — его угловая скорость;

в) если тело, входящее в систему, совершает плоскопараллельное движение, то в этом случае его кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = M\frac{v_C^2}{2} + I_C\frac{\omega^2}{2}, \tag{198}$$

где M — масса тела, v_C — скорость центра тяжести тела, ω — его угловая скорость, I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела и перпендикулярной к неподвижной плоскости, параллельно которой перемещается это тело (задачи 1045, 1046).

Пример 163

Вычислить кинетическую энергию механизма эллипсографа, состоящего из кривошипа OC весом P, вращающегося вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω и приводящего в движение линейку AB с ползунами A и B, причем $OC=AC=CB=l$.

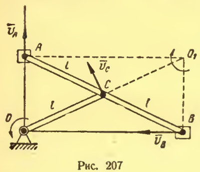


Рис. 207

Вес линейки $2P$, а веса ползунов A и B равны $Q_1=Q_2=Q$ (рис. 207).

Решение

Так как данная система состоит из четырех тел, то ее кинетическая энергия, согласно формуле (192), будет

$$T=T_1+T_2+T_3+T_4,$$

где T_1 — кинетическая энергия кривошипа, T_2 — кинетическая энергия линейки AB, а T_3 и T_4 — соответственно кинетическая энергия ползунов A и B.

Кинетическую энергию кривошипа находим по формуле (197):

$$T_1=I_0\frac{\omega^2}{2}=\frac{Pl^2}{3g}\,\frac{\omega^2}{2}=\frac{Pl^2}{6g}\omega^2.$$

Так как движение линейки AB является плоскопараллельным, то по формуле (198) имеем:

$$T_2=\frac{2P}{g}\,\frac{v_C^2}{2}+I_C\frac{\omega_1^2}{2},$$

где $$v_C=l\omega \quad \text{и} \quad I_C=\frac{2P}{g}\,\frac{(2l)^2}{12}=\frac{2P}{3g}l^2.$$

Чтобы найти угловую скорость ω_1 линейки, построим ее мгновенный центр вращения O_1, тогда

$$\omega_1=\frac{v_C}{CO_1}=\frac{l\omega}{l}=\omega$$

и, следовательно,

$$T_2=\frac{2P}{3g}\,l^2\,\frac{\omega^2}{2}+\frac{2P}{g}\,\frac{l^2\omega^2}{2}=\frac{4}{3}\,\frac{Pl^2\omega^2}{g}.$$

Теперь находим скорости точек A и B:

$$v_A=O_1A\cdot\omega_1=O_1A\cdot\omega$$

и

$$v_B=O_1B\cdot\omega_1=O_1B\cdot\omega.$$

Отсюда по формуле (196) имеем:

$$T_3=\frac{Q}{g}\,\frac{v_A^2}{2}=\frac{Q}{2g}\,O_1A^2\cdot\omega^2,$$

$$T_4=\frac{Q}{g}\,\frac{v_B^2}{2}=\frac{Q}{2g}\,O_1B^2\cdot\omega^2$$

и, следовательно,

$$T_3+T_4=\frac{Q}{2g}\,\omega^2\,(O_1A^2+O_1B^2)=\frac{Q}{2g}\,\omega^2\cdot AB^2=$$
$$=\frac{Q\cdot 4l^2}{2g}\,\omega^2=\frac{2Q}{g}\,l^2\omega^2.$$

Таким образом,

$$T=\frac{Pl^2\omega^2}{6g}+\frac{4Pl^2\omega^2}{3g}+\frac{2Ql\omega^2}{g}=\frac{l^2\omega^2}{2g}(3P+4Q).$$

Пример 164

Планетарный механизм приводится в движение кривошипом OA, соединяющим оси трех зубчатых колес I, II и III. Колесо I, радиус которого равен r_1, неподвижно; кривошип вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω. Вес каждого из колес II и III равен P, радиус каждого из них r, вес кривошипа Q.

Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным тонким стержнем, если $r_1=2r$ (рис. 208).

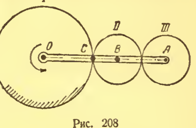


Рис. 208

Решение

Кинетическая энергия данной системы равна

$$T=T_1+T_2+T_3,$$

где T_1, T_2, T_3 — соответственно кинетическая энергия кривошипа и колес II и III. По формуле (197) находим:

$$T_1=\frac{I_0\omega^2}{2}=\frac{Q}{g}\,\frac{OA^2}{3}\,\frac{\omega^2}{2}=\frac{25Q}{6g}\,r^2\omega^2.$$

Кинетическую энергию колес II и III вычисляем по формуле (198)

$$T_2=\frac{P}{g}\,\frac{v_B^2}{2}+\frac{I_B\omega_2^2}{2},$$

$$T_3=\frac{P}{g}\,\frac{v_A^2}{2}+\frac{I_A\omega_3^2}{2},$$

где I_B и I_A — моменты инерции колес *II* и *III* относительно осей, проходящих через точки B и A, перпендикулярных к плоскости рисунка, а ω_2 и ω_3 — абсолютные угловые скорости этих колес.

Так как точки A и B принадлежат кривошипу, то

$$v_A = OA \cdot \omega = 5r\omega \quad \text{и} \quad v_B = OB \cdot \omega = 3r\omega.$$

Кроме того, $$I_A = \frac{P}{2g} r^2 \quad \text{и} \quad I_B = \frac{P}{2g} r^2.$$

Так как колесо *I* неподвижно, то скорость точки C, принадлежащей колесу *II*, равна нулю, т. е. точка C является для колеса *II* мгновенным центром вращения. Отсюда следует, что

$$v_B = CB \cdot \omega_2 = r\omega_2 \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{v_B}{r} = \frac{3r\omega}{r} = 3\omega.$$

По теореме сложения угловых скоростей в случае параллельных осей вращения относительная угловая скорость (по отношению к кривошипу) колеса *II* будет равна

$$\omega_2' = \omega_2 - \omega = 3\omega - \omega = 2\omega.$$

Так как колеса *II* и *III* имеют равные радиусы и находятся во внешнем зацеплении, то их *относительные угловые скорости равны* по величине и *противоположны* по знаку, т. е.

$$\omega_3' = -\omega_2' = -2\omega.$$

Потому по той же теореме абсолютная угловая скорость колеса *III* равна

$$\omega_3 = \omega_3' + \omega = -\omega.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{P}{2g} 9r^2\omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \frac{9\omega^2}{2} = \frac{27P}{4g} r^2\omega^2,$$

$$T_3 = \frac{P}{2g} 25r^2\omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \frac{\omega^2}{2} = \frac{51P}{4g} r^2\omega^2$$

и

$$T = \frac{25Q}{6g} r^2\omega^2 + \frac{27}{4g} Pr^2\omega^2 + \frac{51}{4g} Pr^2\omega^2 =$$

$$= \frac{25Q}{6g} r^2\omega^2 + \frac{39P}{2g} r^2\omega^2 = \frac{25Q + 117P}{6g} r^2\omega^2.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

Задачи этого типа можно разделить на следующие три группы:

1. Задачи, решаемые при помощи уравнения (195), т. е. на основании теоремы об изменении кинетической энергии в конечной форме.

Уравнение (195) следует применять в тех случаях, когда действующие на систему заданные силы или постоянны (и по

модулю и по направлению), или для них существует силовая функция, а в числе известных и искомых в задаче механических величин имеются, кроме этих сил, только скорости (*линейные или угловые*) и перемещения (*поступательные или угловые*) *тел*, входящих в данную систему (задачи 1052—1059, 1063—1071).

2. Задачи, решаемые при помощи уравнения (193), т. е. на основании теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

Уравнение (193) следует применять в тех случаях, когда заданные переменные силы (или сила), действующие на систему, зависят от скорости, а известные и искомые в задаче механические величины те же, что и в предыдущем случае.

В этом случае при интегрировании уравнения (193) сначала нужно разделить переменные.

3. Задачи, решаемые при помощи уравнения (194), т. е. на основании теоремы о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил. Уравнение (194) следует применять в тех случаях, когда требуется найти (либо, наоборот, задано) ускорение тела — линейное (при поступательном движении тела) или угловое (при вращательном движении) (задачи 932—934, 940—942, 1091).

Первая группа

Пример 165

Груз A весом P_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длиной L и весом Q.

Канат переброшен через блок B, вращающийся вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка C, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости. Блок B и каток C — однородные круглые цилиндры радиусом r и весом P_2 каждый. Коэффициент трения качения катка C о горизонтальную плоскость равен f_k. В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока B свешивалась часть каната длиной l. Определить скорость груза A в зависимости от его вертикального перемещения h (рис. 209).

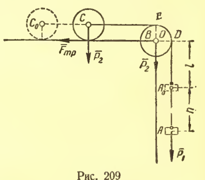


Рис. 209

Решение

Так как в данной задаче известными величинами являются перемещение h груза и *постоянные* силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}$, а требуется

найти скорость v груза, то следует воспользоваться уравнением (195), выражающим теорему об изменении кинетической энергии в конечной форме:

$$T - T_0 = \sum A.$$

Кинетическая энергия данной системы будет равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 — соответственно кинетическая энергия груза A, блока B, катка C и каната. Так как скорость любой точки каната равна скорости v груза, движущегося поступательно, то по формуле (196) находим:

$$T_1 = \frac{P_1}{g} \frac{v^2}{2}, \qquad T_4 = \frac{Q}{g} \frac{v^2}{2}.$$

Кинетическую энергию вращающегося блока находим по формуле (197):

$$T_2 = \frac{I_0 \omega^2}{2}, \quad \text{где } I_0 = \frac{P_2 r^2}{2g} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{v}{r}$$

(угловая скорость блока); следовательно,

$$T_2 = \frac{P_2 v^2}{4g}.$$

Так как движение катка C является плоскопараллельным, то по формуле (198) имеем:

$$T_3 = \frac{P_2}{g} \frac{v_c^2}{2} + I_c \cdot \frac{\omega_1^2}{2},$$

где $I_C = \frac{P_2 r^2}{2g}$, ω_1 — угловая скорость катка.

Так как каток катится без скольжения, то скорость точки касания его с неподвижной плоскостью равна нулю, т. е. эта точка является мгновенным центром вращения катка.

Отсюда следует, что $v_C = r \cdot \omega_1$, поэтому

$$T_3 = \frac{P_2}{2g} v_C^2 + \frac{P_2}{4g} v_C^2 = \frac{3 P_2 v_C^2}{4g} = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} v^2.$$

Таким образом,

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + \frac{Q}{2g} v^2 + \frac{P_2 v^2}{4g} + \frac{3 P_2 v^2}{4g} = \frac{v^2}{2g} (P_1 + Q + 2P_2).$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому $T_0 = 0$.

Перейдем теперь к вычислению суммы работ всех сил, приложенных к данной системе при перемещении груза A на расстояние h.

Работа силы $\overline{P}_1$, очевидно, будет $A_1 = P_1 \cdot h$.

Работа каждой из сил $\bar{P}_2$ равна нулю, так как точка O неподвижна, а точка C перемещается по горизонтали. Момент пары трения качения равен $f_k \cdot P_2$, а работа этой пары, согласно § 3 главы III, будет равна произведению момента пары на угол φ поворота катка, взятому со знаком минус, так как направление момента пары трения качения противоположно направлению вращения катка, следовательно,

$$A_k = -f_k P_2 \varphi.$$

Так как угловая скорость катка ω_1 равна угловой скорости ω блока B, то угол поворота φ катка равен углу поворота блока, т. е. $\varphi = \frac{h}{r}$, поэтому

$$A_k = -f_k P_2 \frac{h}{r}.$$

Так как каток катится *без скольжения*, работа силы трения скольжения $\bar{F}_{Tp}$ будет *равна нулю*, поскольку скорость точки приложения этой силы тоже равна нулю.

Так как, согласно § 3 главы III, работа силы тяжести равна произведению веса тела на *вертикальное* перемещение его центра тяжести, то, сравнивая начальное положение C_0EDA_0 каната с его конечным положением $CEDA$, нетрудно видеть, что работа A_2 веса каната равна произведению веса его части $C_0C = h$, равного $\frac{Q}{L} \cdot h$, на разность высот центров тяжести этой части C_0C и части каната A_0A, т. е. на $r + l + \frac{h}{2}$. Поэтому

$$A_2 = \frac{h}{L}\left(r + l + \frac{h}{2}\right)Q.$$

Таким образом,

$$\sum A = A_1 + A_k + A_2 = P_1 h - f_k P_2 \frac{h}{r} + \frac{h}{L}\left(r + l + \frac{h}{2}\right)Q.$$

Подставляя найденные значения суммы работ и кинетической энергии T в уравнение (195), получим:

$$\frac{v^2}{2g}(P_1 + Q + 2P_2) = h\left[P_1 + \frac{Q}{L}\left(r + l + \frac{h}{2}\right) - \frac{f_k}{r}P_2\right].$$

Отсюда находим искомую скорость груза

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left[P_1 + \frac{Q}{L}\left(r + l + \frac{h}{2}\right) - \frac{f_k}{r}P_2\right]}{P_1 + Q + 2P_2}}.$$

Вторая группа

Пример 166

Прямоугольная пластинка $ABCD$ со сторонами a и b и весом P вращается вокруг вертикальной оси z с начальной угловой скоростью ω_0. Каждый элемент пластинки испытывает при этом сопротивление воздуха, направление которого перпендикулярно к плоскости пластинки, а величина прямо пропорциональна площади элемента и квадрату его скорости v; коэффициент пропорциональности равен μ. Сколько оборотов сделает пластинка до того момента, когда ее угловая скорость станет вдвое меньше начальной? (рис. 210).

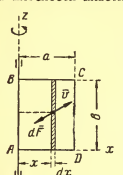


Рис. 210

Решение

Так как силы сопротивления, приложенные к пластинке, зависят от скорости, то для решения задачи следует воспользоваться уравнением

$$dT = \sum dA.$$

Так как пластинка вращается вокруг неподвижной оси, то ее кинетическую энергию находим по формуле (197):

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}, \text{ откуда } dT = I_z \omega \, d\omega.$$

Работа силы тяжести $\overline{P}$, очевидно, равна нулю, так как высота центра тяжести пластинки не изменяется.

Чтобы вычислить работу сил сопротивления, воспользуемся формулой для определения работы сил, приложенных к вращающемуся твердому телу (см. главу III, § 3).

$$\sum dA = M_z \cdot d\varphi,$$

где M_z — сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно оси вращения, а $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела.

Чтобы вычислить M_z, разобьем пластинку на элементарные прямоугольники со сторонами b и dx.

Тогда сила сопротивления, приложенная к такому прямоугольнику, будет равна

$$dF = \mu v^2 b dx = \mu b (\omega x)^2 \, dx$$

и

$$m_z(d\overline{F}) = -x dF = -\mu b \omega^2 x^2 dx;$$

следовательно,

$$M_z = \sum m_z (d\overline{F}), \text{ или } M_z = -\mu b \omega^2 \int_0^a x^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\mu b a^4 \omega^2 \text{ и } \sum dA = -\frac{1}{4}\mu b a^4 \omega^2 \, d\varphi.$$

Таким образом, уравнение (193) принимает вид:

$$I_z \omega d\omega = -\frac{1}{4}\mu b a^4 \omega^2 d\varphi,$$

или $I_z d\omega = -\frac{1}{4}\mu b a^4 \omega d\varphi$. Разделяя здесь переменные, получим $I_z \cdot \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4}\mu b a^4 d\varphi$; отсюда, интегрируя, имеем:

$$I_z \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\mu b a^4}{4} \cdot \varphi, \text{ или } I_z [\ln \omega]_{\frac{\omega_0}{2}}^{\omega_0} = \frac{\mu b a^4}{4}\varphi,$$

откуда находим угол поворота пластинки

$$\varphi = \frac{4 I_z \ln 2}{\mu b a^4}.$$

Применяя вышеуказанную разбивку пластинки $ABCD$ на элементарные прямоугольники, момент инерции I_z пластинки представим в виде:

$$I_z = \sum m x^2,$$

где m — масса элементарного (заштрихованного) прямоугольника.

Если массу пластинки обозначим M, то масса, приходящаяся на единицу площади, будет $\frac{M}{ab}$, а потому

$$m = \frac{M}{ab} b dx = \frac{M}{a} dx$$

$$\text{и } I_z = \int_0^a \frac{M}{a} x^2 dx = \frac{M}{a} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{Ma^2}{3} = \frac{P}{3g} a^2.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{4P \ln 2}{3g\mu b a^2}$.

Разделив этот угол φ на 2π, получим искомое число оборотов пластинки, равное $\frac{2P \ln 2}{3\pi g \mu b a^2}$.

Третья группа

Пример 167

Прямоугольная пластинка со сторонами a и b может вращаться без трения вокруг вертикальной оси AB, проходящей через ее середину и параллельной стороне b. На конце оси надет шкив C радиусом r, на который намотана гибкая нерастяжимая нить; другой конец нити перекинут через блок D и к нему привязан груз весом P, приводящий во вращение пластинку.

Пренебрегая массами шкива и блока, найти ускорение груза, если вес пластинки равен Q, начальная скорость груза равна нулю и никаких сопротивлений движению нет (рис. 211).

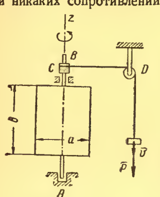


Рис. 211

Решение

Так как требуется определить ускорение груза, то для решения этой задачи воспользуемся уравнением

$$\frac{dT}{dt}=\sum N.$$

Кинетическая энергия данной системы, состоящей из пластинки, вращающейся вокруг неподвижной оси z и груза, движущегося поступательно, равна:

$$T=I_z\frac{\omega^2}{2}+\frac{P}{2g}v^2,$$

где I_z — момент инерции пластинки относительно оси вращения, ω — ее угловая скорость и v — скорость груза. Так как нить нерастяжима, то скорость груза равна окружной скорости шкива, т. е. $v=r\cdot\omega$ и, следовательно,

$$T=I_z\frac{v^2}{2r^2}+\frac{P}{2g}v^2.$$

Зная момент инерции прямоугольной пластинки относительно ее стороны, равной b, найденный в предыдущем примере, и применяя теорему о моментах инерции относительно двух параллельных осей, имеем:

$$\frac{Q}{g}\frac{a^2}{3}=I_z+\frac{Q}{g}\frac{a^2}{4}, \text{ откуда}$$

$$I_z=\frac{Q}{g}\frac{a^2}{12},$$

поэтому

$$T=\frac{Q}{g}\frac{v^2}{2r^2}\frac{a^2}{12}+\frac{Pv^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\frac{Qa^2}{12r^2}+P\right)$$

и

$$\frac{dT}{dt}=\frac{v}{g}\left(\frac{Qa^2}{12r^2}+P\right)\frac{dv}{dt}.$$

При перемещении груза работу будет производить только сила $\overline{P}$ (вес груза), поскольку сопротивлениями пренебрегаем.

Так как сила $\overline{P}$ и скорость груза $\overline{v}$ направлены по одной прямой в одну и ту же сторону, то мощность найдем по формуле (153) (см. гл. III, § 3): $N=P\cdot v$. Подставив найденные значеиия мощности и производной $\frac{dT}{dt}$ в уравнение (194), получим:

$$\frac{v}{g}\left(\frac{Qa^2}{12r^2}+P\right)\frac{dv}{dt}=P\cdot v,$$

Отсюда

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{12r^2P}{Qa^2+12r^2P}g=\text{const.}$$

Следовательно, движение груза является равномерно-ускоренным.

§ 4. Комбинированные задачи

В этих задачах приходится применять совместно две из тех теорем динамики системы, которые рассмотрены в предыдущих параграфах; например, теоремы о количестве движения и о кинетическом моменте системы, или теоремы об изменении кинетической энергии и о движении центра масс системы.

Пример 168

На ступенчатый шкив весом P_3, вращающийся вокруг неподвижной оси O, навернуты канаты, к концам которых подвешены грузы A и B весом P_1 и P_2. Предполагая, что на эту систему действуют только силы тяжести, и пренебрегая сопротивлениями, найти ускорения грузов и реакцию в точке O.

Радиусы R и r и радиус инерции $r_{ин}$ шкива относительно оси O известны (рис. 212).

Рис. 212

Решение

Так как в данной задаче требуется определить ускорения грузов, то применим уравнение (194). Сначала вычислим по формулам (196) и (197) кинетическую энергию T данной системы, состоящей из двух грузов, движущихся поступательно, и шкива, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$T=\frac{P_1}{2g}v_1^2+\frac{P_2}{2g}v_2^2+I_0\frac{\omega^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости грузов A и B, I_0 — момент инерции шкива относительно оси вращения и ω — его угловая скорость.

Но

$$v_1=R\cdot\omega,\ v_2=r\,\omega,\ I_0=\frac{P_3}{g}r_{ин}^2,$$

поэтому

$$T=\frac{P_1}{2g}R^2\omega^2+\frac{P_2}{2g}r^2\omega^2+\frac{P_3}{2g}r_{ин}^2\,\omega^2=\frac{\omega^2}{2g}(P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2).$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt}=(P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2)\frac{\omega}{g}\varepsilon,$$

где $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение шкива.

Так как груз B поднимается, а груз A опускается, то мощность действующих на систему сил равна

$$N=P_1v_1-P_2v_2=(P_1R-P_2r)\,\omega.$$

Следовательно, уравнение (194) имеет вид:

$$\frac{\omega}{g}(P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2)\,\varepsilon=\omega\,(P_1R-P_2r),$$

откуда

$$\varepsilon=\frac{P_1R-P_2r}{P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2}\cdot g.$$

Искомые ускорения грузов равны:

$$w_1=R\cdot\varepsilon=\frac{Rg(P_1R-P_2r)}{P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2}\ \text{ и }\ w_2=r\varepsilon=\frac{rg\,(P_1R-P_2r)}{P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2}\,.$$

Для определения реакции в точке O применим теорему о проекции количества движения $\overline{K}$ системы на неподвижную ось (см. § 1 этой главы). Выбрав координатные оси x и y, как указано на рисунке, на основании этой теоремы будем иметь:

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum X^{(e)}=X_O;\quad \frac{dK_y}{dt}=\sum Y^{(e)}=Y_O-P_1-P_2-P_3,$$

где X_O, Y_O — составляющие искомой реакции по координатным осям. Учитывая, что скорости грузов A и B параллельны оси y и что количество движения шкива равно нулю, так как его центр тяжести лежит на оси вращения, находим: $K_x=0$, $K_y=-\frac{P_1}{g}v_1+$ $+\frac{P_2}{g}v_2$. Из этих уравнений получаем:

$$X_0=0,\ Y_0=P_1+P_2+P_3-\frac{P_1}{g}\frac{dv_1}{dt}+\frac{P_2}{g}\frac{dv_2}{dt}=P_1+P_2+$$
$$+P_3-\frac{P_1}{g}w_1+\frac{P_2}{g}w_2=P_1+P_2+P_3-\frac{(P_1R-P_2r)^2}{P_1R^2+P_2r^2+P_3r_{ин}^2}\,.$$

Угловое ускорение шкива можно найти и по теореме о кинетическом моменте системы. Применяя эту теорему по отношению к оси O, будем иметь:

$$\frac{dL_0}{dt}=\sum m_0(\overline{F}^{(e)})=m_0(\overline{P}_1)+m_0(\overline{P}_2)=P_1R-P_2\cdot r. \qquad \text{(a)}$$

(Моменты внешней силы $\overline{P}_3$ и реакции в точке O относительно оси

вращения шкива равны, очевидно, нулю). Кинетический момент L_0 данной системы относительно оси O равен сумме кинетических моментов шкива и двух грузов относительно той же оси. Следовательно,

$$L_O = I_O\omega + \frac{P_1}{g}R^2\omega + \frac{P_2}{g}r^2\omega = \frac{P_3}{g}r_{ин}^2\omega + \frac{P_1}{g}R^2\omega + \frac{P_2}{g}r^2\omega = \\ = (P_1R^2 + P_2r^2 + P_3r_{ин}^2)\frac{\omega}{g}.$$

Поэтому уравнение (а) принимает вид

$$\frac{P_1R^2 + P_2r^2 + P_3r_{ин}^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = P_1R - P_2r;$$

отсюда

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \frac{P_1R - P_2r}{P_1R^2 + P_2r^2 + P_3r_{ин}^2}g.$$

Пример 169

Доска весом P_1 лежит на двух цилиндрических катках радиусом r и весом P_2 каждый. Вся система движется под действием заданной горизонтальной силы $\overline{F}$, приложенной к доске; при этом предполагается, что катки катятся без скольжения и что скорость доски равна скорости катка в точке A. Найти ускорение доски и общую силу трения в точках A и B (рис 213).

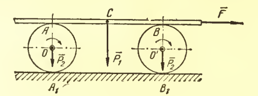


Рис. 213

Решение

Для определения ускорения $\overline{w}$ доски воспользуемся, как и в предыдущей задаче, уравнением (194):

$$\frac{dT}{dt} = \sum N.$$

Так как доска движется поступательно, а движение катков является плоскопараллельным, то кинетическую энергию данной системы находим по формулам (196) и (198):

$$T = \frac{P_1}{g}\frac{v^2}{2} + 2\left[I_O\frac{\omega^2}{2} + \frac{P_2}{g}\frac{v_O^2}{2}\right],$$

где v — скорость доски, v_0 — скорость центра тяжести катка,

ω — угловая скорость катка, I_O — его момент инерции, относительно оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка.

Так как каток катится без скольжения, то точка A_1 есть его мгновенный центр вращения; отсюда следует, что

$$v_A = 2r\cdot\omega, \quad v_0 = r\cdot\omega \text{ и } v_0 = \frac{v_A}{2} = \frac{v}{2}.$$

Кроме того, $I_0 = \frac{P_2}{2g} r^2$, поэтому

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + 2\left[\frac{P_2}{2g}\frac{v^2}{4} + \frac{P_2}{4g}\frac{v^2}{4}\right] = \frac{v^2}{2g}\left[P_1 + \frac{3}{4}P_2\right].$$

Отсюда

$$\frac{dT}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{4}P_2\right)\cdot\frac{v}{g}\frac{dv}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{4}P_2\right)\frac{v\cdot w}{g}.$$

Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ перпендикулярны к скоростям их точек приложения, а силы трения между катками и опорной плоскостью приложены в точках A_1 и B_1, скорости которых равны нулю, то работа каждой из этих сил равна нулю. Сумма работ внутренних сил трения между доской и катками, приложенных в точках A и B, также равна нулю, так как доска не скользит по каткам.

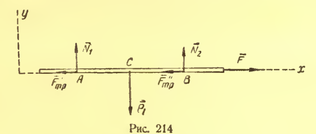


Рис. 214

Поэтому работу производит только сила $\overline{F}$, мощность которой равна $N = F\cdot v$.

Следовательно, уравнение (194) принимает вид:

$$\left(P_1 + \frac{3}{4}P_2\right)\frac{v}{g} w = F\cdot v,$$

откуда

$$w = \frac{4gF}{4P_1 + 3P_2}.$$

Чтобы найти равнодействующую $\overline{F}_{Tp}$ сил трения $\overline{F}'_{Tp}$ и $\overline{F}''_{Tp}$, приложенных к доске в точках A и B, рассмотрим отдельно движение доски и составим уравнения движения ее центра тяжести C:

$$\frac{P_1}{g} w_x = F - F_{Tp}, \quad \frac{P_1}{g} w_y = N_1 + N_2 - P_1,$$

где N_1 и N_2 — нормальные реакции катков, приложенные к доске в точках A и B (рис. 214).

Но $w_x = w$ и $w_y = 0$, поэтому $F_{Tp} = F - \frac{P_1}{g} w = F - \frac{4P_1F}{4P_1 + 3P_2} = \frac{3P_2F}{4P_1 + 3P_2}$, $N_1 + N_2 = P_1$.

Если обозначим f коэффициент трения между доской и катками, то $\overline{F}'_{Tp} \leqslant f \cdot N_1$ и $\overline{F}''_{Tp} \leqslant f \cdot N_2$. Отсюда следует, что

$$F_{Tp} = F'_{Tp} + F''_{Tp} \leqslant f(N_1 + N_2)$$

или

$$\frac{3P_2F}{4P_1 + 3P_2} \leqslant f \cdot P_1, \text{ т. е. } f \geqslant \frac{3P_2F}{P_1(4P_1 + 3P_2)}.$$

Такому условию должен удовлетворять коэффициент трения, чтобы доска не скользила по каткам.

Таблица 17

Классификация задач

Группы	Типы задач: I (задачи на вычисление кинетической энергии задачи 1040—1048)	II (задачи на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы, состоящей из одного тела, или нескольких тел)
1-ая	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы об изменении кинетической энергии в конечной форме (задачи 1053—1074)
2-ая	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме
3-я	—	Задачи, решаемые при помощи теоремы о зависимости между кинетической энергией системы и мощностью действующих на систему сил (задачи 932—934, 940—942, 1091)

ГЛАВА V

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА И ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 1. Принцип Даламбера для системы материальных точек

Если к каждой материальной точке движущейся системы приложить силу инерции этой точки, то все эти силы инерции будут уравновешиваться заданными силами и реакциями связей, при-

ложенными к данной системе. В этом и состоит сущность принципа Даламбера для системы.

Таким образом, если заданную силу, приложенную к k-той точке механической системы, состоящей из n материальных точек, обозначим $\overline{F}_k$, реакцию связей, приложенную к той же точке, обозначим $\overline{N}_k$ и силу инерции этой точки $\overline{F}_k^{(и)}$, то будем иметь:

$$\overline{F}_k + \overline{N}_k + \overline{F}_k^{(и)} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{199}$$

При этом

$$\overline{F}_k^{(и)} = -m_k \overline{w}_k, \tag{200}$$

т. е. сила инерции материальной точки равна по модулю произведению массы этой точки на ее ускорение и направлена противоположно этому ускорению.

Отсюда следует, что система заданных сил, реакций связей и сил инерции удовлетворяет уравнениям статики, т. е. сумма проекций всех этих сил на любую ось и сумма их моментов относительно любой точки или любой оси равна нулю.

Таким образом, принцип Даламбера дает общий прием составления уравнений, необходимых для решения задач динамики системы, причем эти уравнения имеют ту же форму, как и уравнения статики. Этот прием оказывается особенно полезным при решении тех задач, в которых требуется найти динамические реакции связей, т. е. реакции, возникающие при движении системы.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на два основных типа:

I. Задачи, в которых силы, приложенные к каждому телу системы (заданные силы и реакции связей) и силы инерции, их уравновешивающие, лежат в *одной плоскости*.

II. Задачи, в которых заданные силы, реакции связей и силы инерции, их уравновешивающие, образуют *пространственную систему* сил.

ЗАДАЧИ ТИПА I

Так как в задачах этого типа рассматривается плоская система сил (заданные силы, реакции связей и силы инерции), находящихся в равновесии, то применяем три уравнения плоской статики; два уравнения проекций и одно уравнение моментов.

В частных случаях возможны только два из этих уравнений: два уравнения проекций (в случае сходящихся сил) или одно уравнение проекций и одно уравнение моментов (в случае параллельных сил).

Если в задаче имеется система, состоящая из двух или нескольких тел, то приходится, расчленив эту систему, составлять уравнения равновесия для каждого тела в отдельности, совершенно так же, как в статике.

Задачи типа I можно разделить на три группы:

Первая группа

К этой группе относятся задачи, в которых тела, входящие в систему (или одно тело), движутся *поступательно*.

Решая эти задачи по принципу Даламбера, необходимо *к каждой материальной частице* движущегося тела приложить силу инерции этой частицы. Так как *при поступательном* движении тела все его точки имеют одно и то же ускорение $\overline{w}$, то силы инерции материальных частиц тела будут в этом случае пропорциональны массам этих частиц, параллельны и направлены в одну сторону (противоположно ускорению $\overline{w}$); поэтому все эти силы инерции приводятся к одной равнодействующей силе, *приложенной в центре тяжести тела*:

$$\overline{F}^{(и)} = -\sum m\overline{w} = -\overline{w}\sum m = -M\overline{w},$$

здесь M — масса тела.

Итак, *сила инерции поступательно движущегося тела равна по модулю произведению массы этого тела на его ускорение, направлена противоположно этому ускорению и приложена в центре тяжести тела*.

После того как в центре тяжести каждого поступательно движущегося тела мы приложим силу инерции этого тела, данная система, согласно принципу Даламбера, будет в равновесии. Поэтому для этой системы нужно составить уравнения равновесия и, решив их, найти те неизвестные величины, которые требуется определить в данной задаче.

Обычно искомыми величинами в этих задачах являются ускорения тел и реакции связей.

Пример 170

Два груза A и B весом P и Q, связанные нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, вращающийся вокруг неподвижной оси O, могут скользить по граням неподвижной призмы, причем коэффициент трения равен f. Найти ускорение w, с которым будут двигаться грузы, и силу натяжения нити, если углы α и β известны (рис. 215).

Решение

Каждый из грузов A и B движется поступательно и прямолинейно. Допустим, что груз A опускается с ускорением $\overline{w}_1$. Так как грузы A и B связаны нерастяжимой нитью, то груз B будет подниматься с ускорением $\overline{w}_2$, равным по модулю ускорению $\overline{w}_1$, т. е. $w_1 = w_2 = w$.

Применяя принцип Даламбера, приложим к грузу A силу инерции этого груза, равную по модулю $F_1^{(и)} = \frac{P}{g} w$ и направленную противоположно ускорению $\overline{w}_1$, а к грузу B — силу инерции,

равную по модулю $F_2^{(и)} = \frac{Q}{g} w$ и направленную противоположно ускорению $\overline{w}_2$. Тогда, по принципу Даламбера, данная система будет находиться в равновесии.

Расчленив эту систему, т. е. перерезав нить, составим по два уравнения равновесия для каждого груза в отдельности. Для

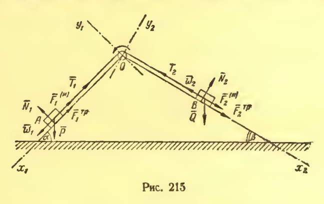


Рис. 215

этого спроектируем все силы, приложенные к грузу A, т. е. силы $\overline{P}$, $\overline{N}_1$, $\overline{F}_{Tp1}$, $\overline{F}_1^{(и)}$, $\overline{T}_1$ на оси Ox_1, и Oy_1, а силы, приложенные к грузу B, т. е. силы $\overline{Q}$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_{Tp2}$, $\overline{F}_2^{(и)}$, $\overline{T}_2$, — на оси Ox_2 и Oy_2. Здесь $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ — нормальные реакции граней призмы, $\overline{F}_{Tp1}$ и $\overline{F}_{Tp2}$ — силы трения, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ — реакции (силы натяжения) нити, приложенные соответственно к грузам A и B, причем $T_1 = T_2 = T$.

Тогда будем иметь:

для груза A:

$$P \sin \alpha - F_{Tp1} - F_1^{(и)} - T = 0,$$
$$N_1 - P \cos \alpha = 0;$$

для груза B:

$$Q \sin \beta + F_{Tp2} + F_2^{(и)} - T = 0,$$
$$N_2 - Q \cos \beta = 0.$$

Из второго и четвертого уравнений находим:

$$N_1 = P \cos \alpha_1, \qquad N_2 = Q \cos \beta.$$

Следовательно,

$$F_{Tp1} = f \cdot N_1 = fP \cos \alpha,$$
$$F_{Tp2} = f \cdot N_2 = fQ \cos \beta.$$

Подставив значения сил трения и сил инерции в первое и третье уравнения, получим:

$$\frac{P}{g}w+T=P\sin\alpha-fP\cos\alpha=P(\sin\alpha-f\cos\alpha),$$
$$T-\frac{Q}{g}w=Q\sin\beta+fQ\cos\beta=Q(\sin\beta+f\cos\beta).$$

Отсюда находим:

$$w=\frac{P(\sin\alpha-f\cos\alpha)-Q(\sin\beta+f\cos\beta)}{P+Q}g$$

и $$T=\frac{PQ\,[\sin\alpha+\sin\beta-f(\cos\alpha+\cos\beta)]}{P+Q}=\frac{2PQ}{P+Q}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+f\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Вторая группа

К этой группе относятся задачи, в которых тела, входящие в систему (или одно тело), имеют *вращательное движение* вокруг неподвижной оси.

Ускорение каждой точки такого тела равно геометрической сумме касательного и нормального (центростремительного) ускорений. В соответствии с этим, решая задачу по принципу Даламбера, мы должны *к каждой материальной частице* вращающегося тела приложить две силы инерции частицы: 1) касательную силу инерции, равную по модулю произведению массы частицы на ее касательное ускорение и направленную противоположно этому ускорению, и 2) нормальную силу инерции (центробежную силу), равную по модулю произведению массы частицы на ее нормальное ускорение и направленную противоположно этому ускорению.

В остальном метод решения задач этой группы остается таким же, как и в задачах первой группы. Если тело вращается равномерно, то касательные ускорения, а следовательно, и касательные силы инерции всех его материальных частиц равны нулю.

Пример 171

Два однородных стержня OA и OB, весом P каждый, прикреплены концами при помощи шарнира O к вертикальному стержню OD, а их концы A и B привязаны нерастяжимыми горизонтальными нитями к точке D этого стержня. Треугольник AOB начинают вращать вокруг оси OD с постоянной угловой скоростью ω. Найти натяжения T нитей и реакцию шарнира O, приложенную к стержню OB, если $OA=OB=a$ и $\angle DOB=\varphi$ (рис. 216).

Решение

К стержню OB, вращающемуся равномерно вокруг оси OD, приложены заданная сила $\overline{P}$, реакции $\overline{X}_O$, $\overline{Y}_O$ шарнира O и

реакция T нити. Применяя принцип Даламбера, разобьем стержень OB на бесконечно малые элементы и приложим к каждому такому элементу силу инерции $\overline{f}_k^{(и)}$, направленную противоположно его ускорению $\overline{w}_k$ и равную по модулю $f_k^{(и)}=m_k w_k$, где m_k — масса элемента.

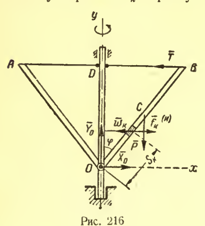


Рис. 216

Если рассматриваемый элемент находится на расстоянии s_k от точки O, то $w_k=r_k\omega^2=s_k\cdot\sin\varphi\cdot\omega^2$ и, следовательно, $f_k^{(и)}=m_k\omega^2 s_k\cdot\sin\varphi$.

Согласно принципу Даламбера, сила $\overline{P}$, реакции $\overline{X}_O$, $\overline{Y}_O$, $\overline{T}$ и силы инерции $\overline{f}_k^{(и)}$, приложенные к каждому элементу стержня OB, взаимно уравновешиваются. Поэтому будем иметь три уравнения равновесия:

уравнение проекций на ось x

$$X_0-T+\sum f_k^{(и)}=0,$$

уравнение проекций на ось y

$$Y_0-P=0$$

и уравнение моментов относительно точки O

$$-P\frac{a}{2}\sin\varphi+Ta\cdot\cos\varphi-\sum f_k^{(и)}s_k\cos\varphi=0.$$

Вычислим суммы, входящие в эти уравнения:

$$\sum f_k^{(и)}=\sum m_k\omega^2 s_k\sin\varphi=\omega^2\sin\varphi\sum m_k s_k,$$
$$\sum f_k^{(и)}s_k\cos\varphi=\sum m_k\omega^2 s_k^2\sin\varphi\cos\varphi=$$
$$=\omega^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\sum m_k s_k^2.$$

Но по формуле для координаты центра тяжести C имеем

$$\sum m_k s_k=M\cdot s_C=\frac{P}{g}\frac{a}{2},$$
$$\sum m_k s_k^2=I_O=\frac{Ma^2}{3}=\frac{Pa^2}{3g},$$

где I_O — момент инерции стержня OB относительно точки O. Поэтому уравнения равновесия принимают вид:

$$X_O-T+\frac{Pa}{2g}\omega^2\sin\varphi=0,$$
$$Y_O-P=0,$$

$$-P\frac{a}{2}\sin\varphi+Ta\cos\varphi-\frac{Pa^2\omega^2}{3g}\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$Y_O=P,$$

$$T=\frac{P}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi+\frac{2a\omega^2}{3g}\sin\varphi\right),$$

$$X_O=T-\frac{Pa}{2g}\omega^2\sin\varphi=\frac{P}{2}\left(\operatorname{tg}\varphi-\frac{a\omega^2}{3g}\sin\varphi\right).$$

Третья группа

К этой группе относятся такие задачи, в которых некоторые из тел, входящих в систему, имеют вращательное движение, а другие движутся поступательно.

Метод решения задач этой группы на основании принципа Даламбера, по существу, ничем не отличается от метода решения задач первых двух групп. Только здесь имеются и тела, поступательно движущиеся, и тела вращающиеся.

Пример 172

К шкиву подъемника радиусом R приложен вращающий момент M; веса грузов равны P_1 и P_2. Определить угловое ускорение шкива и натяжения частей каната AC и BD, считая шкив однородным круглым цилиндром весом P_3 и пренебрегая сопротивлениями и весом каната (рис 217, *а* и *б*).

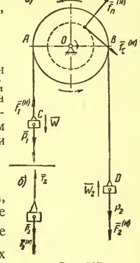


Рис. 217

Решение

Решая задачу по принципу Даламбера, приложим к грузам силы инерции, равные $F_1^{(и)}=\frac{P_1}{g}w_1$, $F_2^{(и)}=\frac{P_2}{g}w_2$ и направленные противоположно ускорениям $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ этих грузов, причем $w_1=w_2=w$. Кроме того, нужно приложить силу инерции *к каждой материальной частице шкива*. Так как ускорение такой частицы слагается из касательного ускорения $\overline{w}_\tau$ и нормального ускорения $\overline{w}_n$, то и сила инерции этой материальной частицы является равнодействующей двух сил: касательной силы инерции $\overline{f}_\tau^{(и)}$, направленной противоположно ускорению $\overline{w}_\tau$, и нормальной силы инерции (центробежной силы) $\overline{f}_n^{(и)}$, направленной противоположно ускорению $\overline{w}_n$. Если массу материальной части-

цы обозначить m, а ее расстояние от оси вращения — r, то

$$f_\tau^{(и)} = mw_\tau = mr\varepsilon, \quad f_n^{(и)} = mw_n = mr\omega^2,$$

где ε и ω — угловое ускорение и угловая скорость шкива.

После того, как мы приложим все эти силы инерции, можно, согласно принципу Даламбера, рассматривать данную систему, как находящуюся в равновесии. Следовательно, сумма моментов всех внешних сил, приложенных к этой системе, и сил инерции относительно точки O будет равна нулю. Поэтому, учитывая, что моменты относительно точки O силы $\overline{P}_3$, центробежных сил и реакции в точке O равны нулю, получаем следующее уравнение:

$$M + RP_1 - RP_2 - RF_1^{(и)} - RF_2^{(и)} - \sum rf_\tau^{(и)} = 0,$$

или

$$M - R(P_2 - P_1) - R(P_1 + P_2)\frac{w}{g} - \sum mr^2\varepsilon = 0.$$

Силы натяжения канатов AC и BD в это уравнение не входят, так как для данной системы эти силы являются внутренними.

Но $\sum mr^2\varepsilon = \varepsilon\sum mr^2 = I_O\cdot\varepsilon$, где I_O — момент инерции шкива относительно оси O, причем для однородного круглого цилиндра $I_O = \frac{P_3}{2g}\cdot R^2$. А потому предыдущее уравнение принимает вид:

$$R(P_1 + P_2)\frac{w}{g} + \frac{P_3}{2g}R^2\varepsilon = M - R(P_2 - P_1).$$

Так как $w = R\cdot\varepsilon$, то из этого уравнения находим:

$$w = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0{,}5P_3)}g$$

и

$$\varepsilon = \frac{w}{R} = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R^2(P_1 + P_2 + 0{,}5P_3)}g.$$

Для определения натяжения каната BD расчленим систему и рассмотрим в отдельности правый груз, к которому приложены сила $\overline{P}_2$, сила инерции $\overline{F}_2^{(и)}$ и реакция каната $\overline{T}_2$ (рис. 206, *б*).

Так как эти силы уравновешиваются, то

$$T - P_2 - F_2^{(и)} = 0,$$

откуда

$$T_2 = P_2 + F_2^{(и)} = P_2 + \frac{P_2}{g}w = P_2\left(1 + \frac{w}{g}\right) =$$
$$= P_2\left[1 + \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0{,}5P_3)}\right] =$$
$$= \frac{P_2[M + R(2P_1 + 0{,}5P_3)]}{R(P_1 + P_2 + 0{,}5P_3)}.$$

Рассматривая затем равновесие левого груза в отдельности, найдем натяжение каната AC:

$$T_1 = \frac{P_1[R(2P_2 + 0{,}5P_3) - M]}{R(P_1 + P_2 + 0{,}5P_3)}.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II

К этому типу относятся задачи, в которых заданные силы, реакции связей и силы инерции образуют пространственную систему сил. Эти задачи можно разделить на две группы.

Первая группа

К этой группе относятся задачи, в которых требуется определить реакции двух закрепленных точек оси при вращении точечных масс вокруг этой оси.

Решение задач этой группы аналогично решению задач второй группы типа I, только здесь приходится составлять в общем случае шесть уравнений равновесия пространственной статики.

Вторая группа

К этой группе относятся задачи, в которых требуется определить реакции двух закрепленных точек твердого тела (двух подшипников или подшипника и подпятника), возникающие при вращении *твердого тела* вокруг неподвижной оси, проходящей через эти закрепленные точки.

При решении этих задач по принципу Даламбера нужно разбить вращающееся твердое тело на элементарные материальные частицы и к каждой такой частице приложить касательную и нормальную силы инерции этой частицы. Так как согласно принципу Даламбера все эти силы инерции уравновешиваются заданными силами, приложенными к телу, и реакциями закрепленных точек, то в общем случае будем иметь шесть известных из статики уравнений равновесия (три уравнения проекций и три уравнения моментов). В эти уравнения войдут, во-первых, сумма проекций всех сил инерции на каждую из трех выбранных координатных осей, или, что то же, проекции главного вектора сил инерции на каждую из этих осей и, во-вторых, суммы моментов всех сил инерции относительно каждой координатной оси, или, что то же, главные моменты сил инерции относительно каждой из этих осей. Если ось вращения тела примем за координатную ось z, то проекции главного вектора сил инерции на координатные оси будут равны (см., например, «Курс теоретической механики» И. М. Воронкова, § 139)

$$R_x^{(и)} = M(x_C\omega^2 + y_C\varepsilon), \quad R_y^{(и)} = M(y_C\omega^2 - x_C\varepsilon), \quad R_z^{(и)} = 0, \quad (201)$$

а главные моменты сил инерции относительно координатных осей выразятся так:

$$M_x^{(и)} = I_{zx}\varepsilon - I_{yz}\omega^2, \quad M_y^{(и)} = I_{yz}\varepsilon + I_{zx}\omega^2, \quad M_z^{(и)} = -I_z\varepsilon. \qquad (202)$$

В этих формулах M — масса тела, ω и ε — соответственно угловая скорость и угловое ускорение тела, x_C и y_C — координаты центра тяжести C тела, I_{zx} и I_{yz} — центробежные моменты инерции тела и I_z — момент инерции тела относительно оси вращения.

Отметим некоторые частные случаи:

1. Тело вращается равномерно. Тогда $\omega = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$.

2. Центр тяжести тела лежит на оси вращения. Тогда $x_C = y_C = 0$ и, следовательно,

$$R_x^{(и)} = R_y^{(и)} = R_z^{(и)} = 0. \qquad (201')$$

В этом случае все силы инерции приводятся *к одной паре*, проекции вектора-момента которой на координатные оси определяются по формулам (202).

3. Координатная плоскость xOy является *плоскостью симметрии* тела. Тогда центр тяжести тела лежит в этой плоскости, и ось вращения z как ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью инерции тела в точке O, поэтому $I_{yz} = I_{zx} = 0$. Если при этом $\varepsilon = 0$, то

$$M_x^{(и)} = M_y^{(и)} = M_z^{(и)} = 0$$

$$\text{и } R_x^{(и)} = Mx_C\omega^2, \quad R_y^{(и)} = My_C\omega^2, \quad R_z^{(и)} = 0. \qquad (202')$$

В этом случае все силы инерции приводятся *к одной равнодействующей,* равной $\overline{R}^{(и)} = M\omega^2\overline{r}_C$, где $\overline{r}_C$ — радиус-вектор точки C, т. е. приводятся к одной силе, равной *центробежной силе центра тяжести, если предположить, что в этом центре сосредоточена вся масса тела;* при этом линия действия этой равнодействующей $\overline{R}^{(и)}$ *проходит через центр тяжести тела.*

4. Если ось вращения z является *главной центральной осью инерции тела* и если при этом тело вращается равномерно, то $\varepsilon = 0$, $x_C = y_C = 0$ и $I_{yz} = I_{zx} = 0$, а потому $R_x^{(и)} = R_y^{(и)} = R_z^{(и)} = 0$ и $M_x^{(и)} = M_y^{(и)} = M_z^{(и)} = 0$, т. е. система сил инерции является в этом случае уравновешенной системой. Следовательно, в уравнения равновесия, составленные на основании принципа Даламбера, силы инерции не войдут; эти уравнения будут совпадать с уравнениями статики, которые используются при *равновесии* тела под действием приложенных к нему заданных сил. Поэтому искомые реакции закрепленных точек будут в этом случае равны *статическим* реакциям.

При решении задач этой группы по принципу Даламбера следует иметь в виду, что в уравнение моментов относительно оси вращения z искомые реакции закрепленных точек не входят, так как их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому эти реакции определяются из остальных пяти уравнений равно-

весия. Если в данной задаче, как это нередко бывает, требуется найти только реакции, ***перпендикулярные к оси вращения z***, то достаточно составить четыре уравнения равновесия (два уравнения проекций на оси x и y и два уравнения моментов относительно этих осей).

Пример 173

Однородный тонкий диск радиусом R и весом P насажен на горизонтальный вал под углом α к оси вала и жестко скреплен с валом, причем центр тяжести O диска лежит на оси вала.

Определить реакции подшипников A и B, если вал вращается с постоянной угловой скоростью ω и $AO=OB=a$. Весом вала и трением в подшипниках можно пренебречь (рис. 218).

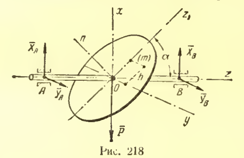


Рис. 218

Решение

Реакция каждого из подшипников перпендикулярна к оси вращения вала и равна геометрической сумме двух сил: *статической* реакции, вызываемой весом $\overline{P}$ диска, и ***инерционной*** реакции, возникающей при вращении диска и обусловленной проявлением инерции материальных частиц вращающегося диска.

Каждая из статических реакций равна, очевидно, $\frac{P}{2}$ и направлена по вертикали вверх. Для определения инерционных реакций применим принцип Даламбера. Составляющие инерционной реакции по координатным осям x и y, приложенные в точке A, обозначим $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, а инерционные реакции, приложенные в точке B,—$\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$. При этом ось x лежит в одной плоскости с осью вращения вала и с нормалью On к плоскости диска, ось y — в плоскости диска; ось z направим по оси вращения вала. Оси x и y связаны с диском и вращаются вместе с ним. Диаметр Oz_1 диска лежит в плоскости xOz и, следовательно, перпендикулярен к оси y.

Так как сила $\overline{P}$ уравновешивается статическими реакциями подшипников, то, согласно принципу Даламбера, силы инерции

материальных частиц диска будут уравновешиваться инерционными реакциями $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$.

Поэтому будем иметь следующих четыре уравнения равновесия: уравнение проекций на ось x

$$R_x^{(\text{и})}+X_A+X_B=0,$$

уравнение проекций на ось y

$$R_y^{(\text{и})}+Y_A+Y_B=0,$$

уравнение моментов относительно оси x

$$M_x^{(\text{и})}+aY_A-aY_B=0,$$

уравнение моментов относительно оси y

$$M_y^{(\text{и})}-aX_A+aX_B=0.$$

В этих уравнениях, как было уже указано выше, $R_x^{(\text{и})}$, $R_y^{(\text{и})}$ — проекции на оси x и y главного вектора сил инерции материальных частиц диска, $M_x^{(\text{и})}$ и $M_y^{(\text{и})}$ — главные моменты этих сил относительно тех же осей. Так как в данной задаче центр тяжести диска лежит на оси вращения z и $\omega=\text{const}$, то $x_O=y_O=0$ и $\varepsilon=0$, поэтому из формул (201′) и (202) имеем:

$$R_x^{(\text{и})}=R_y^{(\text{и})}=0,\ M_x^{(\text{и})}=-I_{yz}\omega^2,\ M_y^{(\text{и})}=I_{zx}\omega^2.$$

Кроме того, так как ось y, направленная по диаметру диска, есть ось симметрии диска, то она является его главной центральной осью инерции, а поэтому $I_{yz}=0$.

Следовательно, предыдущие уравнения принимают вид:

$$X_A+X_B=0,\ Y_A+Y_B=0,\ a(Y_A-Y_B)=0,$$
$$a(X_A-X_B)=I_{zx}\omega^2.$$

Из этих уравнений находим:

$$Y_A=Y_B=0,\ X_A=I_{zx}\frac{\omega^2}{2a},\ X_B=-I_{zx}\frac{\omega^2}{2a}.$$

Вычислим центробежный момент инерции I_{zx}. Если рассмотрим материальную частицу диска с массой m, то, как видно из рис. 219, координаты этой частицы будут равны

$$x=h\sin\alpha,\quad z=h\cos\alpha,$$

где h — расстояние этой частицы от оси y. Следовательно,

$$I_{zx}=\sum mh^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sum mh^2,\text{ но }\sum mh^2 -$$

момент инерции диска относительно оси y (относительно диаметра), равный $\frac{MR^2}{4}$, поэтому $I_{zx}=\frac{MR^2}{8}\sin 2\alpha$.

Таким образом, окончательно получаем:

$$Y_A = Y_B = 0, \quad X_A = \frac{MR^2}{16a}\omega^2 \sin 2\alpha = \frac{PR^2}{16ag}\omega^2 \sin 2\alpha = -X_B.$$

Отсюда видно, что инерционные реакции подшипников параллельны оси x; следовательно, эти реакции, сохраняя постоянную величину, непрерывно изменяют свое направление, так как ось x вращается вместе с диском. Отрицательное значение силы X_B указывает на то, что эта сила имеет направление, противоположное принятому на рис. 218, а поэтому реакции $\overline{X}_A$, $\overline{X}_B$ образуют пару сил, лежащую в плоскости, проходящей через ось вращения и нормаль On к плоскости диска.

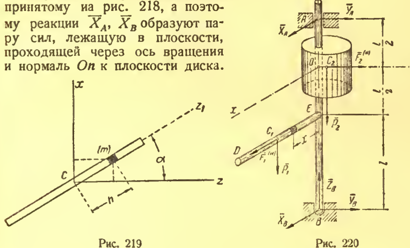


Рис. 219 Рис. 220

Пример 174

С вертикальной осью, укрепленной в подшипнике A и подпятнике B, жестко соединены перпендикулярный к этой оси тонкий стержень DE длиной l и весом $\overline{P}_1$ и круглый однородный цилиндр весом $\overline{P}_2$, образующие которого параллельны оси AB. При этом цилиндр насажен эксцентрично так, что его центр тяжести C_2 находится от оси AB на расстоянии $OC_2 = a$. Цилиндр и стержень вращаются вокруг оси AB с данной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти реакции подшипника A и подпятника B, если $BE = l$, $EO = AO = \frac{l}{2}$ и $OC_2 \perp ED$ (рис. 220).

Решение

Проведем координатные оси, связанные с цилиндром, как указано на рис. 220, т. е. ось z направим по оси вращения BA, ось y по прямой OC_2 и ось x — параллельно стержню ED.

Составляющие реакции подшипника A по осям x и y обозначим $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, а составляющие реакции подпятника B по координатным осям — $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$.

Применяя принцип Даламбера, разобьем стержень DE на бесконечно малые элементы и к каждому такому элементу приложим соответствующую силу инерции.

Так как $\omega = \text{const}$, то $\varepsilon = 0$ и, следовательно, касательные силы инерции всех элементов стержня будут равны нулю, а их нормальные силы инерции (центробежные силы) будут направлены вдоль стержня от оси вращения.

Равнодействующая этих центробежных сил будет иметь то же направление и по модулю равна $F_1^{(и)} = \sum mx\omega^2 = \omega^2 \sum mx$, где m — масса элемента, а x — расстояние от элемента до оси вращения. Но $\sum mx = M_1 x_{C_1} = \frac{P_1}{g} x_{C_1}$, где x_{C_1} — расстояние центра тяжести C_1 стержня от оси AB, равное $\frac{l}{2}$, поэтому $F_1^{(и)} = \frac{P_1}{2g} l\omega^2$.

Так как плоскость xOy является для цилиндра плоскостью симметрии и цилиндр вращается равномерно, то, как было указано выше, силы инерции материальных частиц цилиндра приводятся в этом случае к одной равнодействующей $\overline{F}_2^{(и)}$, равной центробежной силе центра тяжести C_2 цилиндра в предположении, что в этом центре сосредоточена вся масса цилиндра. Следовательно, $F_2^{(и)} = M_2 y_{C_2} \omega^2 = \frac{P_2}{g} a\omega^2$; эта сила $F_2^{(и)}$ приложена в точке C_2 и направлена по OC_2, т. е. по оси y.

Согласно принципу Даламбера, заданные силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ реакции $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и силы инерции $\overline{F}_1^{(и)}$, $\overline{F}_2^{(и)}$ взаимно уравновешиваются; поэтому для этой системы сил можно составить следующих пять уравнений равновесия (три уравнения проекций на оси x, y, z и два уравнения моментов относительно осей x и y):

$$X_A + X_B + F_1^{(и)} = 0; \quad Y_A + Y_B + F_2^{(и)} = 0;$$
$$Z_A - P_1 - P_2 = 0;$$
$$-P_2 \cdot a - Y_A \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{2} Y_B \cdot l = 0;$$
$$P_1 \frac{l}{2} - F_1^{(и)} \cdot \frac{l}{2} + X_A \frac{l}{2} - \frac{3}{2} X_B \cdot l = 0$$

или

$$X_A + X_B = -\frac{P_1}{2g} l\omega^2; \quad Y_A + Y_B = -\frac{P_2}{g} a\omega^2;$$
$$Z_A = P_1 + P_2;$$
$$Y_A - 3Y_B = -2P_2 \frac{a}{l}; \quad X_A - 3X_B = \frac{P_1}{2g} l\omega^2 - P_1.$$

Из этих уравнений находим:

$$X_B=\frac{P_1}{4}\left(1-\frac{l\omega^2}{g}\right);\quad X_A=-\frac{P_1}{4}\left(1+\frac{l\omega^2}{g}\right);$$

$$Z_A=P_1+P_2;$$

$$Y_B=\frac{aP_2}{4}\left(\frac{2}{l}-\frac{\omega^2}{g}\right);\quad Y_A=-\frac{aP_2}{4}\left(\frac{2}{l}+\frac{3\omega^2}{g}\right).$$

Таблица 18

Классификация задач

Тип I. Плоская система сил. Уравнения равновесия: 1) $\Sigma X=0$, 2) $\Sigma Y=0$, 3) $\Sigma m_0(\overline{F})=0$.			Тип II. Пространственная система сил. Уравнения равновесия: 1) $\Sigma X=0$, 2) $\Sigma Y=0$, 3) $\Sigma Z=0$, 4) $\Sigma m_x(\overline{F})=0$, 5) $\Sigma m_y(\overline{F})=0$, 6) $\Sigma m_z(\overline{F})=0$.	
1-ая группа	2-ая группа	3-я группа	1-ая группа	2-ая группа
Тела, входящие в систему (или одно тело), движутся поступательно	Тела, входящие в систему (или одно тело), имеют вращательное движение	Некоторые из тел, входящих в систему, имеют вращательное движение, а другие тела движутся поступательно	Определение реакций двух закрепленных точек оси при вращении точечных масс вокруг этой оси	Определение реакций двух закрепленных точек оси при вращении твердого тела вокруг этой оси
Задачи 878—890, 925, 926, 928	Задачи 891—901, 1101, 1102, 1099	Задачи 927, 929, 930	Задачи 1103, 1104	Задачи 1100, 1105—1110

§ 2. Принцип возможных (виртуальных) перемещений

Если на систему материальных точек наложены те или иные связи, то для такой системы не всякое перемещение оказывается возможным. Если при этом связи не зависят от времени, т. е. если в уравнения связей время t явно не входит, то такие связи называются *стационарными;* в противном случае связи называются *нестационарными*. В дальнейшем рассматриваются только *стационарные связи*.

Возможным (виртуальным) перемещением данной системы называется совокупность любых бесконечно малых перемещений материальных точек этой системы, допускаемых в данный момент наложенными на систему связями.

Проекции на координатные оси возможного перемещения $\delta\overline{s_A}$ точки A системы обозначаются δx_A, δy_A, δz_A и представляют

собой изменения координат этой точки при ее возможном перемещении, называемые *вариациями координат* этой точки.

Если на систему, состоящую из n материальных точек, наложены s стационарных связей вида

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (203)$$

то из $3n$ координат точек системы произвольными являются только $3n - s$, а остальные s координат могут быть выражены как функции этих произвольных координат из s предыдущих уравнений. Число

$$k = 3n - s, \qquad (204)$$

т. е. число независимых координат точек системы, называется числом *степеней свободы* этой системы. В случае, когда все точки системы перемещаются в плоскостях, параллельных данной неподвижной плоскости, положение каждой точки определяется двумя координатами, и, следовательно, число степеней свободы будет равно

$$k = 2n - s. \qquad (205)$$

Если сумма элементарных работ реакций связей, наложенных на систему, *при любом возможном перемещении системы равна нулю*, то такие связи называются *совершенными* (идеальными). Необходимое и достаточное условие равновесия системы с совершенными связями дает *принцип возможных перемещений*, который формулируется следующим образом: *для того, чтобы рассматриваемое положение системы с совершенными связями являлось положением равновесия этой системы, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех заданных (активных) сил, действующих на систему, при любом ее возможном перемещении из этого положения, равнялась нулю.*

Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы выражается уравнением:

$$\sum \delta A = \sum F \cos \alpha \delta s = 0. \qquad (206)$$

Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, получим *общее уравнение* статики в таком виде:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \qquad (207)$$

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на три типа:

1. Задачи, в которых при заданном положении равновесия системы требуется определить силы, действующие на систему, или найти зависимость между этими силами.

II. Задачи, в которых при заданных силах, действующих на систему, требуется определить положение равновесия этой системы.

III. Задачи на применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей.

Следует иметь в виду, что в каждом из этих типов могут рассматриваться системы с одной или несколькими степенями свободы.

ЗАДАЧИ ТИПА I

(задачи 903—908, 911—921)

Пример 175

Два невесомых стержня AB и BC соединены шарниром B, в котором приложена вертикальная сила $\overline{Q}$, направленная вниз. Конец C шарнирно прикреплен к стене, а конец A шарнирно соединен с ползуном, который может без трения скользить по полу. Какую горизонтальную силу $\overline{P}$ надо приложить к ползуну, чтобы система при заданных углах α и β находилась в равновесии (рис 221).

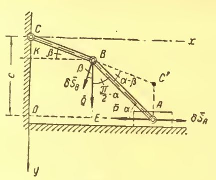


Рис. 221

Решение

Если ползун прижат к полу, то рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как на две точки $B(x_B,\ y_B)$ и $A(x_A,\ y_A)$, определяющие положение системы, наложены *три* связи:

$$x_B^2+y_B^2-b^2=0,\ (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2-a^2=0,$$

$$y_A-c=0\,*.$$

Поэтому число степеней свободы данной системы равно:

$$k=2n-s=2\cdot 2-3=1.$$

* Эти уравнения выражают следующие условия: а) расстояние $BC=b=\text{const}$, б) расстояние $AB=a=\text{const}$, и в) расстояние от точки A до оси x, т. е. $DC=c=\text{const}$.

Применяя принцип возможных перемещений, задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Сообщаем системе возможное перемещение. Для точки A возможное перемещение $\overline{\delta s_A}$ направлено параллельно оси x, а возможное перемещение $\overline{\delta s_B}$ точки B направлено по касательной к траектории (к окружности с центром в точке C), которую может описывать точка B, т. е. перпендикулярно к стержню CB. Далее, пользуясь основным выражением элементарной работы, на основании принципа возможных перемещений имеем:

$$\sum \delta A = -P\delta s_A + Q\delta s_B \cos\beta = 0.$$

Отсюда: $$P = \frac{\delta s_B}{\delta s_A} Q \cos\beta.$$

Теперь нужно найти зависимость между δs_B и δs_A. Так как расстояние между точками B и A при возможном перемещении системы остается неизменным, то проекции возможных перемещений этих точек на прямую BA, их соединяющую, равны между собой:

$$np_{BA}(\overline{\delta s_B}) = np_{BA}(\overline{\delta s_A}),$$

т. е. $$\delta s_B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \delta s_A \cdot \cos\alpha,$$

или $$\delta s_A \cdot \sin(\alpha - \beta) = \delta s_A \cdot \cos\alpha,$$

откуда $$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)};$$

следовательно, $$P = Q \cdot \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Зависимость между δs_A и δs_B можно также найти, построив мгновенный центр вращения C' стержня AB, который лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к векторам $\overline{\delta s_A}$ и $\overline{\delta s_B}$ (см. рис. 221). Тогда возможные перемещения точек A и B, так же, как их возможные скорости, пропорциональны расстояниям этих точек от мгновенного центра вращения звена AB. Следовательно,

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{C'B}{C'A}.$$

Но из треугольника $AC'B$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

поэтому

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Второй способ. Сообщая системе возможное перемещение и пользуясь *аналитическим выражением элементарной работы,* имеем:

$$\sum (X\delta x + Y\delta y) = P_x\delta x_A + P_y\delta y_A + Q_x\delta x_B + Q_y\delta y_B = \\ = -P\delta x_A + Q\delta y_B = 0.$$

Теперь следует найти зависимость между вариациями δy_B и δx_A координат точек B и A.

Для этого выражаем координаты y_B и x_A через углы α и β; $y_B = b\sin\beta$; $x_A = DE + EA = b\cos\beta + a\cos\alpha$. При бесконечно малом возможном перемещении системы углы α и β получат бесконечно малые приращения $\delta\alpha$ и $\delta\beta$, а координаты x_A и y_B, являющиеся функциями этих углов, получают приращения δx_A и δy_B. Пользуясь тем, что приращение функции при бесконечно малом приращении аргумента можно заменить ее дифференциалом, имеем:

$$\delta y_B = b\cos\beta\,\delta\beta; \quad \delta x_A = -b\sin\beta\,\delta\beta - a\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Подставляя эти значения δx_A и δy_B в условие равновесия системы, получим:

$$bP\sin\beta\,\delta\beta + aP\sin\alpha\,\delta\alpha + bQ\cos\beta\,\delta\beta = 0.$$

Таким образом, вариации координат точек A и B мы выразили через вариации углов α и β. Зависимость же между вариациями $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ легко установить, исходя из того, что

$$CD = CK + KD = c = \text{const},$$

или

$$b\sin\beta + a\sin a = c = \text{const}.$$

Варьируя это уравнение, находим:

$$a\cos\alpha\,\delta\alpha + b\cos\beta\,\delta\beta = 0, \quad \text{откуда } \delta\alpha = -\frac{b\cos\beta}{a\cos\alpha}\delta\beta.$$

Подставляя это значение $\delta\alpha$ в уравнение, выражающее условие равновесия системы, получаем:

$$bP\sin\beta\,\delta\beta - bP\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}\delta\beta + bQ\cos\beta\,\delta\beta = 0,$$

или

$$b[P\sin(\beta - \alpha) + Q\cos\beta\cos\alpha]\,\delta\beta = 0$$

и, следовательно,

$$P\sin(\beta - \alpha) + Q\cos\alpha\cos\beta = 0;$$

отсюда

$$P = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}Q.$$

ЗАДАЧИ ТИПА II
(задачи 909, 910)

Пример 176

Три стержня одинакового веса Q соединены между собой шарнирами. Первый стержень может вращаться вокруг неподвижного шарнира O, а к свободному концу третьего стержня приложена горизонтальная сила $\overline{F}$, которая удерживает всю систему в вертикальной плоскости в равновесии.

При этом стержни образуют с вертикалью углы, соответственно равные φ_1, φ_2, φ_3. Определить эти углы, если $F=Q$ (рис. 222).

Решение

Принимая центр шарнира O за начало координат, координатные оси направляем, как указано на рис. 222. На шесть координат точек A, B и C рассматриваемой системы наложено три условия ($OA=\text{const}$, $AB=\text{const}$, $BC=\text{const}$); следовательно, система имеет $k=2n-s=2\cdot 3-3=3$ степени свободы.

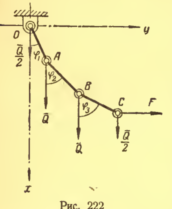


Рис. 222

В соответствии с этим положение данной системы определяется тремя независимыми друг от друга параметрами — тремя углами φ_1, φ_2 и φ_3.

Вес каждого стержня можно разложить на две составляющие, приложенные по его концам; тогда получим систему сил, показанную на рис. 222. Пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, условие равновесия этой системы сил можно выразить в следующем виде:

$$Q\cdot\delta x_A+Q\delta x_B+\frac{Q}{2}\delta x_C+F\delta y_C=0.$$

Учитывая, что по условию задачи $F=Q$, и производя сокращение, имеем:

$$\delta x_A+\delta x_B+\frac{1}{2}\delta x_C+\delta y_C=0.$$

Вводя обозначения $OA=a$, $AB=b$ и $BC=c$, выражаем координаты точек A, B и C через искомые углы φ_1, φ_2, φ_3:

$$x_A=a\cos\varphi_1;\quad x_B=a\cos\varphi_1+b\cos\varphi_2;$$

$$x_C=a\cos\varphi_1+b\cos\varphi_2+c\cdot\cos\varphi_3;\quad y_C=a\sin\varphi_1+b\sin\varphi_2+c\cdot\sin\varphi_3.$$

Отсюда находим выражения вариаций координат этих точек через вариации углов φ_1, φ_2, φ_3:

$$\delta x_A = -a \sin\varphi_1 \delta\varphi_1; \quad \delta x_B = -a \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - b \sin\varphi_2 \delta\varphi_2;$$
$$\delta x_C = -a \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - b \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 - c \sin\varphi_3 \delta\varphi_3;$$
$$\delta y_C = a \cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + b \cos\varphi_2 \delta\varphi_2 + c \cos\varphi_3 \delta\varphi_3.$$

Подставляя эти значения вариаций координат в уравнение, выражающее условие равновесия системы, и группируя члены, содержащие $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$, получаем:

$$a(\cos\varphi_1 - 2{,}5 \sin\varphi_1)\delta\varphi_1 + b(\cos\varphi_2 - 1{,}5 \sin\varphi_2)\delta\varphi_2 + $$
$$+ c(\cos\varphi_3 - 0{,}5 \sin\varphi_3)\cdot\delta\varphi_3 = 0.$$

Это равенство должно выполняться при всяком возможном перемещении данной системы, т. е. при любых значениях вариаций $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$, а так как эти вариации друг от друга не зависят и каждая из них может иметь произвольное значение, то это возможно лишь при условии, что коэффициент при каждой из этих вариаций равен нулю, т. е.

$$\cos\varphi_1 - 2{,}5 \sin\varphi_1 = 0,$$
$$\cos\varphi_2 - 1{,}5 \sin\varphi_2 = 0,$$
$$\cos\varphi_3 - 0{,}5 \sin\varphi_3 = 0,$$

или $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}4$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = 0{,}6667$; $\operatorname{tg}\varphi_3 = 2$.
Отсюда находим:

$$\varphi_1 = 21°48'; \quad \varphi_2 = 33°40'; \quad \varphi_3 = 64°25'.$$

ЗАДАЧИ ТИПА III

(задачи 922—924)

Пример 177

Трехшарнирная арка нагружена несимметрично силами $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ (рис. 223). Найти горизонтальную составляющую реакции шарнира B при указанных на рисунке размерах.

Решение

Горизонтальную составляющую реакции шарнира B обозначим X. Чтобы найти эту реакцию, нужно шарнирно-неподвижную опору B заменить опорой на катках для того, чтобы точка B могла перемещаться в горизонтальном направлении. Сообщим теперь этой точке возможное горизонтальное перемещение δs_B.

Тогда полуарка OA повернется вокруг неподвижной точки A на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_A$. При этом точка O получит возможное перемещение $\delta\overline{s}_O$, которое будет направлено по касательной к дуге окружности, описываемой точкой O, т. е. перпендикулярно к AO. Зная направления возможных перемещений $\delta\overline{s}_O$ и $\delta\overline{s}_B$ точек B и O, находим мгновенный центр вращения C полуарки BO, как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках O и B к векторам $\delta\overline{s}_O$ и $\delta\overline{s}_B$. Тогда

перемещение полуарки BO можно представить как поворот вокруг центра C на некоторый элементарный угол $\delta\varphi_C$.

На основании принципа возможных перемещений имеем:

$$\sum \delta A = \delta A_X + \delta A_Q + \delta A_P = 0.$$

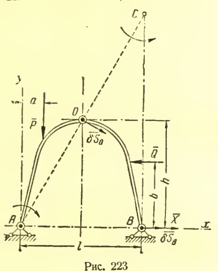


Рис. 223

Вычисляя работу каждой из сил $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{X}$ как произведение момента этой силы относительно центра вращения на угол поворота (см. формулу 145), получим:

$$\delta A_X = |m_C(\overline{X})|\, \delta\varphi_C = X\, 2h\, \delta\varphi_C,$$

$$\delta A_Q = -|m_C(\overline{Q})|\, \delta\varphi_C = -Q(2h-b)\, \delta\varphi_C\,^*,$$

$$\delta A_P = |m_A(\overline{P})|\, \delta\varphi_A = P\, a\delta\varphi_A.$$

Следовательно, получаем уравнение

$$X_B \cdot 2h\delta\varphi_C - Q(2h-b)\, \delta\varphi_C + Pa\delta\varphi_A = 0,$$

откуда

$$X_B = \frac{Q(2h-b)}{2h} - \frac{Pa}{2h}\, \frac{\delta\varphi_A}{\delta\varphi_C}.$$

Так как точка O принадлежит одновременно обеим полуаркам OA и OB,

то

$$\delta s_O = AO\, \delta\varphi_A = OC\, \delta\varphi_C.$$

---

* Работа силы $\overline{Q}$ отрицательна, так как сила $\overline{Q}$ направлена относительно центра C по часовой стрелке, а поворот полуарки BO вокруг этого центра происходит против часовой стрелки.

Но $OA = OC$, а потому $\delta\varphi_A = \delta\varphi_C$, и, следовательно, $X = \frac{1}{2h}[Q(2h-a) - Pa]$.

§ 3. Общее уравнение динамики

(уравнение Даламбера — Лагранжа)

Применяя совместно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений к движущейся системе, можно сделать следующий вывод: *при движении системы, на которую наложены совершенные связи, сумма элементарных работ всех заданных сил, действующих на систему, и сил инерции материальных точек системы равна нулю при любом возможном перемещении системы из занимаемого ею в каждый данный момент положения.*

Этот результат выражается одним из следующих уравнений:

$$\sum \overline{F}\,\overline{\delta r} + \overline{F}^{(и)}\,\overline{\delta r} = 0 \qquad (208)$$

или, так как $\overline{F}^{(и)} = -m\overline{w}$,

$$\sum (\overline{F} - m\overline{w})\,\overline{\delta r} = 0, \qquad (209)$$

или в координатной форме

$$\sum \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \quad (210)$$

Уравнение (208) или (209) называется *общим уравнением динамики* (уравнением Даламбера — Лагранжа).

В настоящем параграфе рассмотрим задачи двух типов:

I. Задачи, в которых требуется установить условия относительного равновесия системы.

II. Задачи, в которых требуется определить ускорения точек системы.

В задачах каждого из этих типов могут рассматриваться системы с одной или несколькими степенями свободы.

ЗАДАЧИ ТИПА I

(задачи 925—929, 935—939)

Пример 178

Центробежный регулятор (рис. 224) состоит из двух шаров A и A' весом P каждый, размерами которых можно пренебречь. Шары закреплены на концах A и A' коленчатых прямоугольных рычагов, которые имеют шарнирные опоры C и C' на перекладине $C'OC$, соединенной неизменно с осью регулятора. Муфта D весом P_1 отжимается вниз пружиной, а с другой стороны поддерживается роликами B и B' рычагов регулятора. Определить жесткость c

пружины, если при заданной постоянной угловой скорости ω угол отклонения стержней CA и $C'A'$ от вертикали равен φ. Даны расстояния: $OE=l$, $AC=A'C'=a$, $CB=C'B'=b$, $OC=$ $=OC'=e$ и длина недеформированной пружины $l_0>l$.

Расстояние центра тяжести муфты от его основания равно h.

Решение

Координатные оси располагаем, как указано на рис. 224. Заданными силами, действующими на систему, являются веса шаров и муфты, а также сила упругости пружины $Q=c\cdot\lambda$,

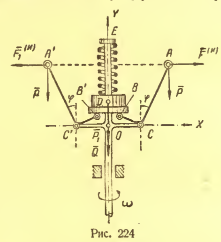


Рис. 224

где λ — деформация (сжатие) пружины. Кроме того, в точках A и A' приложим центробежные силы инерции $F^{(и)}=F_1^{(и)}=$ $=\frac{P}{g}R\omega^2$, где R — расстояние от центра каждого из шаров до оси вращения y.

На основании уравнения Даламбера — Лагранжа сумма работ всех этих сил при любом возможном перемещении системы равна нулю. Следовательно, пользуясь аналитическим выражением элементарной работы, имеем:

$$F^{(и)}\delta x_A - F_1^{(и)}\delta x_{A'} - P\delta y_A - P\delta y_{A'} - (P_1+Q)\,\delta y_D = 0.$$

Но

$$x_A = -x_{A'} = e + a\sin\varphi, \quad y_A = y_{A'} = a\cos\varphi \quad \text{и} \quad y_D = b\sin\varphi + h,$$

откуда $\delta x_A = -\delta x_{A'} = a\cos\varphi\delta\varphi, \quad \delta y_A = \delta y_{A'} = -a\sin\varphi\delta\varphi,$

$$\delta y_D = b\cos\varphi\delta\varphi.$$

Кроме того, $R=x_A=e+a\sin\varphi$ и, следовательно, $F^{(и)}=F_1^{(и)}=$ $=\frac{P}{g}R\omega^2=\frac{P}{g}(e+a\sin\varphi)\omega^2$.

Таким образом, уравнение Даламбера — Лагранжа принимает вид:

$$\left[2\frac{P}{g}(e+a\sin\varphi)\,\omega^2 a\cos\varphi+2Pa\sin\varphi-(P_1+Q)\,b\cos\varphi\right]\delta\varphi=0.$$

Отсюда, учитывая, что $\delta\varphi\neq 0$, находим:

$$bQ\cos\varphi=2Pa\left(\frac{e+a\sin\varphi}{g}\,\omega^2\cos\varphi+\sin\varphi\right)-bP_1\cos\varphi;$$

следовательно, $Q=2P\frac{a}{b}\left(\frac{e+a\sin\varphi}{g}\,\omega^2+\operatorname{tg}\varphi\right)-P_1.$

Определив Q, нетрудно найти жесткость c пружины. Действительно, деформация пружины $\lambda=l_0-(l-2h-b\sin\varphi)$, поэтому $c=\frac{Q}{\lambda}=\frac{Q}{l_0-l+2h+b\sin\varphi}$.

ЗАДАЧИ ТИПА II

(задачи 930, 943—948)

Пример 179

Через блоки A и B с неподвижными осями переброшен шнур, поддерживающий подвижной блок C; части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок C нагружен гирей весом $P=4$ *кГ*, а к концам шнура прикреплены грузы весом $P_1=2$ *кГ* и $P_2=3$ *кГ*. Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массой блока и шнура и трением на осях (рис. 225).

Рис. 225

Решение

Располагая координатные оси, как указано на рис. 225, применяем общее уравнение динамики в форме (210), которое в данном случае принимает вид:

$$\left(P-\frac{P}{g}w\right)\delta x+\left(P_1-\frac{P_1}{g}w_1\right)\delta x_1+$$
$$+\left(P_2-\frac{P_2}{g}w_2\right)\delta x_2=0,$$

где w, w_1, w_2 — искомые ускорения грузов.

Учитывая, что длина шнура постоянна, очевидно, имеем:

$$x_1+2x+x_2=\text{const}.$$

Таким образом, три координаты x, x_1 и x_2, определяющие положение данной системы (предполагается, что все грузы перемещаются прямолинейно), связаны одним условием; следова-

тельно, данная система имеет две степени свободы. Варьируя последнее равенство, находим зависимость между вариациями координат трех грузов:

$$\delta x_1 + 2\delta x + \delta x_2 = 0,$$

отсюда

$$\delta x = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2).$$

Подставляя это значение δx в уравнение Даламбера — Лагранжа и вынося за скобки множители δx_1 и δx_2, получим:

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g} w_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g} w_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g} w\right)\delta x_2 = 0.$$

Это уравнение имеет место при *любых*, независимых друг от друга значениях вариаций δx_1 и δx_2, а это возможно лишь при условии, что коэффициент при *каждой* из этих вариаций равен нулю. Следовательно, должно быть:

$$\frac{P}{2g} w - \frac{P_1}{g} w_1 = \frac{P}{2} - P_1, \quad \frac{P}{2g} w - \frac{P_2}{g} w_2 = \frac{P}{2} - P_2,$$

или, подставляя данные числовые значения весов,

$$w - w_1 = 0, \quad 2w - 3w_2 = -g.$$

Отсюда:

$$w_1 = w \text{ и } w_2 = \frac{2}{3} w + \frac{g}{3}.$$

Чтобы получить третье уравнение для определения трех искомых уравнений, продифференцируем дважды по t уравнение $x_1 + 2x + x_2 = \text{const}$. Тогда будем иметь:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0, \text{ или } w_1 + 2w + w_2 = 0.$$

Подставляя сюда значения w_1 и w_2, получаем

$$w + 2w + \frac{2}{3} w + \frac{g}{3} = 0.$$

Отсюда находим:

$$w = -\frac{g}{11}$$

и, следовательно,

$$w_1 = -\frac{g}{11}, \quad w_2 = -\frac{2}{33} g + \frac{g}{3} = \frac{3}{11} g.$$

Отрицательное значение ускорений w и w_1 указывает на то, что их направление совпадает с отрицательным направлением оси x, т. е. что эти ускорения направлены вверх.

§ 4. Уравнения Лагранжа II-го рода (дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах)

Обобщенными координатами механической системы называются независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно определить в каждый данный момент положение этой системы и через которые, следовательно, можно выразить декартовы координаты всех ее точек.

Таким образом, если обозначим k обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$, то декартовы координаты каждой материальной точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ системы можно выразить как функции параметров $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$ и времени t, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, t). \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (211)$$

Если связи, наложенные на систему, являются стационарными, то время t в правые части этих уравнений не войдет. Число k независимых обобщенных координат равно числу степеней свободы данной системы.

В соответствии с числом независимых обобщенных координат, т. е. с числом степеней свободы данной механической системы, имеем для нее k уравнений Лагранжа II-го рода:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \end{aligned}\right\} \qquad (212)$$

где — кинетическая энергия системы $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$; Q_1, Q_2, Q_3, $\ldots$, Q_k — так называемые обобщенные силы, которые определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_k &= \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

Производные $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_k$ от обобщенных координат по времени называются *обобщенными скоростями*.

Уравнения Лагранжа II рода представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $q_1, q_2, \ldots q_k$.

Для того чтобы составить эти уравнения, кинетическую энергию T системы необходимо выразить через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Обобщенные силы можно вычислять одним из следующих способов:

а) непосредственно по формулам (213);

б) чтобы найти обобщенную силу Q_j, соответствующую обобщенной координате q_j, нужно данной механической системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна координата q_j, а все остальные обобщенные координаты остаются неизменными; затем составить сумму элементарных работ $\sum_{i=1}^{n} \delta A_{ji}$ всех заданных сил на этом перемещении и разделить эту систему на вариацию δq_j, т. е.

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta A_{ji}}{\delta q_j} (j = 1,\ 2,\ \dots\ k); \tag{214}$$

в) в частном случае, если система находится под действием сил, имеющих потенциал, то обобщенные силы определяются по формулам:

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \tag{215}$$

где U — силовая функция, Π — потенциальная энергия системы, т. е. *обобщенная сила равна частной производной от силовой функции или взятой со знаком минус частной производной от потенциальной энергии системы по соответствующей обобщенной координате.*

При вычислении обобщенных сил по формулам (215) необходимо предварительно силовую функцию или потенциальную энергию системы выразить через обобщенные координаты этой системы.

Интегрируя систему уравнений Лагранжа, находим обобщенные координаты q_1, q_2, ... q_k как функции времени t и $2k$ произвольных постоянных c_1, c_2, ... c_{2k}, определяемых начальными условиями движения системы. В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи двух типов.

1. Задачи на применение уравнений Лагранжа к системе с одной степенью свободы (задачи 1179—1200).

2. Задачи на применение этих уравнений к системе с двумя степенями свободы (задачи 1201—1203, 1217—1220).

ЗАДАЧИ ТИПА I

Пример 180

Водило AB, представляющее собой однородный тонкий стержень длиной $2l$ и массой m, вращается вокруг оси O неподвижной шестерни 1 под действием приложенного к нему момента M

и приводит в движение две одинаковые свободно насаженные на водило шестеренки 2 и 2' радиусом r и массой $m_2 = m$ каждая, которые катятся по сцепленной с ними неподвижной шестерне 1 и приводят в движение зубчатое колесо 3, обладающее массой $m_3 = \frac{5}{3} m$. К окружности колеса 3 приложена сила сопротивления $\overline{P}$. Определить угловое ускорение ε водила, если шестеренки 2 и 2' представляют собой сплошные однородные диски, а масса колеса 3 равномерно распределена по его окружности (рис. 226).

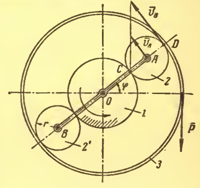


Рис. 226

Решение

Положение данного механизма вполне определяется одним параметром — углом φ поворота водила, который и принимаем за обобщенную координату. В соответствии с этим в данной задаче имеем одно уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Вычисляем кинетическую энергию T системы, которая слагается из кинетической энергии $T_{вод}$ (водила), энергии $2T_2$ двух бегающих шестеренок и энергии T_3 колеса 3:

$$T = T_{вод} + 2T_2 + T_3 = \frac{I\omega^2}{2} + 2\left(\frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2}\right) + \frac{I_3 \omega_3^2}{2},$$

где I и I_3 — моменты инерции водила и колеса 3 относительно оси O, а I_2 — момент инерции шестеренки 2 относительно оси вращения A.

Угловые скорости ω_2 шестеренки 2 и ω_3 колеса 3, а также линейную скорость точки A выражаем через угловую скорость водила $\omega = \dot{\varphi}$, которая в данном случае является обобщенной скоростью:

$$v_A = \omega \cdot OA = \omega l, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{CA} = \frac{\omega l}{r}$$

(мгновенный центр вращения шестеренки 2 находится в точке C зацепления этой шестеренки с неподвижной шестеренкой I); для определения ω_3 находим скорость точки D зацепления шестеренки 2 с колесом 3: $v_D = 2v_A = 2\omega l$; следовательно,

$$\omega_3 = \frac{v_D}{OD} = \frac{2\omega l}{l + r}.$$

Теперь вычисляем моменты инерции:

$$I=\frac{m(AB)^2}{12}=\frac{m4l^2}{12}=\frac{ml^2}{3};\quad I_2=\frac{m_2r^2}{2};$$

$$I_3=m_3OD^2=\frac{5}{3}m(l+r)^2.$$

Таким образом, для кинетической энергии системы получаем следующее выражение:

$$T=\frac{ml^2}{6}\omega^2+m\omega^2l^2+\frac{mr^2}{2}\,\frac{\omega^2l^2}{r^2}+\frac{5}{6}\,m(l+r)^2\,\frac{4\omega^2l^2}{(l+r)^2}=$$

$$=\frac{ml^2\omega^2}{6}+m\omega^2l^2+\frac{ml^2\omega^2}{2}+\frac{10}{3}\,\omega^2l^2m=5\omega^2l^2m=5l^2\cdot\dot{\varphi}^2m.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=10l^2\,m\,\dot{\varphi};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=10ml^2\,\ddot{\varphi}=10ml^2\cdot\varepsilon,$$

где ε — угловое ускорение водила; $\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$, так как T не зависит от φ.

Определим теперь обобщенную силу.

При повороте водила на элементарный угол $\delta\varphi$ сумма работ, действующих на данную систему сил, будет

$$\sum\delta A=M\delta\varphi-P(l+r)\cdot\delta\varphi_3,$$

где $\delta\varphi_3$ — угол поворота колеса 3. Но зависимость между углами φ и φ_3 очевидно такова же, как и между угловыми скоростями водила и колеса 3. Следовательно,

$$\delta\varphi_3=\frac{2l}{l+r}\,\delta\varphi,$$

поэтому

$$\sum\delta A=M\delta\varphi-P(l+r)\,\frac{2l}{l+r}\,\delta\varphi=(M-2Pl)\,\delta\varphi;$$

отсюда

$$Q=\frac{\sum\delta A}{\delta\varphi}=M-2Pl.$$

Подставляя найденные значения обобщенной силы и производных $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)$ и $\frac{dT}{\partial\varphi}$ в уравнение Лагранжа, получаем

$$10ml^2\varepsilon=M-2Pl,$$

откуда

$$\varepsilon=\frac{M-2Pl}{10ml^2}$$

Пример 181

Составить дифференциальное уравнение малых колебаний системы, показанной на рис. 227, около ее равновесного положения и найти период этих колебаний, если известны массы m_1 и m_2 грузов A и D, жесткость c пружины BE и длины стержней $OA=l_1$, $OB=OC=CD=l_2$. Массами пружины и стержней, а также размерами груза A можно пренебречь. При горизонтальном положении стержня AB вес груза A уравновешивается силой упругости пружины. При малых отклонениях системы от равновесного положения можно считать, что пружина остается вертикальной.

Рис. 227

Решение.

За обобщенную координату данной системы с одной степенью свободы принимаем угол α отклонения стержня AB от горизонтали, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки: тогда имеем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \alpha}=Q.$$

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T=\frac{m_1v_A^2}{2}+\frac{m_2v_D^2}{2},$$

где v_A и v_D — скорости грузов A и D, но

$$v_A=l_1\dot{\alpha} \text{ и } v_D=\dot{y}_D=\frac{d}{dt}(2l_2\cos\alpha)=-2l_2\sin\alpha\,\dot{\alpha},$$

поэтому

$$T=\frac{1}{2}(m_1l_1^2+4m_2l_2^2\sin^2\alpha)\,\dot{\alpha}^2.$$

При малых колебаниях системы можно пренебречь малой величиной 4-го порядка $\sin^2\alpha\,\dot{\alpha}^2$. Тогда $T=\frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\alpha}^2$.

Вычисляем потенциальную энергию системы

$$\Pi=m_1g(h-y_A)+m_2g(h-y_D)+\frac{c\lambda^2}{2}=$$
$$=m_1g(h-l_1\sin\alpha)+m_2g\left(h-2l_2\cos\alpha\right)+\frac{c\lambda^2}{2},$$

где h — высота точки O, λ — удлинение пружины, причем

$$\lambda=\lambda_{cm}+l_2\sin\alpha,$$

где λ_{cm} — статическое удлинение пружины при равновесном положении системы.

Следовательно,

$$\Pi = (m_1 + m_2) gh - m_1 g l_1 \sin\alpha - 2m_2 g l_2 \cos\alpha + \frac{c}{2} (\lambda_{cm} + l_2 \sin\alpha)^2.$$

Теперь находим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m_1 l_1^2 \dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) = m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = O.$$

Вычисляем обобщенную силу как взятую с обратным знаком частную производную от потенциальной энергии по обобщенной координате:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = m_1 g l_1 \cos\alpha - 2m_2 g l_2 \sin\alpha - c (\lambda_{cm} + l_2 \sin\alpha)\, l_2 \cos\alpha.$$

Так как при равновесном положении системы сумма моментов относительно точки O сил, приложенных к рычагу AB (веса груза A и силы упругости пружины) равна нулю, то $m_1 g l_1 = c\lambda_{cm} l_2$, поэтому

$$Q = -(2m_2 g l_2 + c l_2^2 \cos\alpha) \sin\alpha = -l_2 (2m_2 g + c l_2 \cos\alpha) \sin\alpha.$$

При малых колебаниях системы около положения равновесия ввиду незначительности угла α, можно положить

$$\sin\alpha \approx \alpha \quad \text{и} \quad \cos\alpha \approx 1.$$

Тогда

$$Q = -l_2 (2m_2 g + c l_2)\, \alpha.$$

Подставляя найденные значения производных $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right)$, $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ и обобщенной силы Q в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение малых колебаний данной системы

$$m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} + l_2 (2m_2 g + c l_2)\, \alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{l_2 (2m_2 g + c l_2)}{m_1 l_1^2}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний с круговой частотой k. Период этих колебаний

$$\frac{2\pi}{k} = 2\pi l_1 \sqrt{\frac{m_1}{l_2 (2m_2 g + c l_2)}}.$$

Пример 182

Два однородных сплошных цилиндра общим весом P_1, жестко закрепленные на оси, толщиной и массой которой можно пренебречь, образуют скат, опирающийся на горизонтальные опоры (рис. 228). На той же оси свободно насажен тонкий стержень длиной l, несущий на конце точечный груз A весом P_2. Определить движение этой системы, пренебрегая массой стержня и предполагая, что отклонения маятника CA от вертикали весьма малы, трение в узле C отсутствует, и цилиндры катятся по опорам без скольжения (рис. 228).

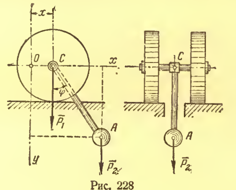


Рис. 228

Решение

В данном случае рассматривается система с двумя степенями свободы. Координатные оси располагаем так, как указано на рис. 228. В качестве обобщенных координат выбираем абсциссу x точки C и угол φ отклонения стержня CA от вертикали. В соответствии с этим в данной задаче составляем два уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x,$$

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi.$$

Обозначив общую массу цилиндров m_1, а массу груза A через m_2, вычисляем кинетическую энергию T системы, которая слагается из кинетической энергии T_1 цилиндров и кинетической энергии T_2 груза A, причем $T_1=\frac{m_1 v_C^2}{2}+I_C\frac{\omega^2}{2}$ и $T_2=\frac{m_2 v_A^2}{2}$, где v_C и v_A — скорости точек C и A, ω — угловая скорость цилиндров, а I_C — момент инерции цилиндров относительно оси вращения, проходящей через точку C. Следовательно,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{m_2 v_A^2}{2}.$$

При этом

$$v_C = \dot{x}, \quad I_C = \frac{m_1 R^2}{2} \text{ и } \omega = \frac{v_C}{R} = \frac{\dot{x}}{R},$$

где R — радиус цилиндров.

Для определения скорости точки A выразим ее декартовы координаты x_A и y_A через выбранные обобщенные координаты

$$x_A = x + l \sin \varphi, \quad y_A = l \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\dot{x}_A = \dot{x} + l \cos \varphi\, \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_A = -l \sin \varphi\, \dot{\varphi}.$$

Следовательно, $v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = (\dot{x} + l \cos \varphi\, \dot{\varphi})^2 + + l^2 \sin^2 \varphi\, \dot{\varphi}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \cos^2 \varphi\, \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} l \cos \varphi + l^2 \sin^2 \varphi\, \dot{\varphi}^2 = = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}\, l \cos \varphi.$

Теперь получаем

$$T = \frac{m_1 \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{\dot{x}^2}{2R^2} + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} [(1{,}5 m_1 + m_2)\, \dot{x}^2 + m_2 l\, (l\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi)].$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (1{,}5 m_1 + m_2)\, \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi;$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (1{,}5 m_1 + m_2)\, \ddot{x} + m_2 l\, (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi);$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\, (l\dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2 l\, (l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \times$$
$$\times \dot{\varphi} \sin \varphi); \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\, \dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Обобщенные силы Q_x и Q_φ находим по общим формулам (213). Замечая, что $P_{1x} = P_{2x} = O$, $P_{1y} = P_1$, $P_{2y} = P_2$,

$$y_C = O = \text{const} \text{ и } y_A = l \cos \varphi,$$

на основании этих формул получаем

$$Q_x = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial x} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0,$$
$$Q_\varphi = P_1 \frac{\partial y_C}{\partial \varphi} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

Так как в данной задаче система находится под действием сил тяжести, для которых существует силовая функция, то

обобщенные силы можно определить и по формулам (215). Силовая функция для сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ имеет вид:

$$U = P_1 y_C + P_2 y_A = P_2 l \cos\varphi.$$

Следовательно,

$$Q_x = \frac{\partial U}{dx} = 0, \quad Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial\varphi} = -P_2 l \sin\varphi = -m_2 g l \sin\varphi.$$

Таким образом, уравнения Лагранжа принимают вид

$$(1{,}5m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 \sin\varphi) = 0,$$
$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

Так как по условию задачи отклонения маятника CA от вертикали весьма малы (т. е. координата φ и ее производные по времени являются весьма малыми величинами), то полученные точные дифференциальные уравнения движения системы можно заменить более простыми приближенными уравнениями, полагая $\sin\varphi \approx \varphi$ и $\cos\varphi \approx 1$. Кроме того, произведение $\dot{\varphi}^2 \sin\varphi$ является малой величиной более высокого порядка, чем остальные члены; поэтому можно положить $\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \approx 0$; тогда получаем приближенные уравнения Лагранжа

$$\left.\begin{aligned}(1{,}5\, m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi} &= 0, \\ \ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0.\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}&(а)\\&(б)\end{aligned}$$

Из уравнения (а) имеем

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{1{,}5m_1 + m_2}\ddot{\varphi}.$$

Первое интегрирование этого уравнения дает:

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l}{1.5m_1 + m_2}\dot{\varphi} + C_1.$$

После вторичного интегрирования получаем:

$$x = -\frac{m_2 l}{1{,}5m_1 + m_2}\varphi + C_1 t + C_2.$$

Для того, чтобы определить функцию φ, из уравнений (а) и (б) исключаем $\ddot{x}$:

$$-\frac{m_2 l}{1{,}5m_1 + m_2}\ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

или

$$1{,}5m_1 l\ddot{\varphi} + (1{,}5m_1 + m_2) g\varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right)\frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Вводя обозначение

$$\left(1+\frac{2m_2}{3m_1}\right)\frac{g}{l}=k^2,$$

будем иметь:

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$\varphi=C_3\cos kt+C_4\sin kt,$$

откуда

$$\dot{\varphi}=-C_3k\sin kt+C_4k\cos kt.$$

Следовательно,

$$x=C_1t+C_2-\frac{m_2l}{1{,}5m_1+m_2}(C_3\cos kt+C_4\sin kt).$$

Полученные уравнения, выражающие координаты x и φ как функции времени t, и определяют движение рассматриваемой системы. Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются по начальным условиям движения системы. В начальный момент при $t=0$ имеем:

$$x_0=-\frac{m_2l}{1{,}5m_1+m_2}\varphi_0+C_2;\quad \dot{x}_0=-\frac{m_2l}{1{,}5m_1+m_2}\dot{\varphi}_0+C_1;$$

$$\varphi_0=C_3,\ \dot{\varphi}_0=kC_4.$$

Пусть

$$x_0=0,\ \dot{x}_0=0,\ \varphi_0\neq 0,\ \dot{\varphi}_0=0.$$

Тогда

$$C_1=0,\ C_2=\frac{m_2l}{1{,}5m_1+m_2}\varphi_0,\ C_3=\varphi_0,\ C_4=0$$

и следовательно:

$$\varphi=\varphi_0\cos kt,$$

$$x=\frac{m_2l\varphi_0}{1{,}5m_1+m_2}(1-\cos kt),$$

где

$$k=\sqrt{\left(1+\frac{2m_2}{3m_1}\right)\frac{g}{l}}=\sqrt{\left(1+\frac{2P_2}{3P_1}\right)\frac{g}{l}}.$$

Пример 183

Крановая тележка (рис. 229) массой $m_1=2220$ *кГ·сек²/м* наезжает со скоростью $v_0=1$ *м/сек* на упругий буфер, жесткость которого $c=870$ *кГ/см*. В центре тяжести A тележки подвешен груз B массой $m_2=2040$ *кГ·сек²/м* на канате длиной $l=14$ *м*. Определить движение тележки и груза после соприкосновения тележки с упором, пренебрегая массой каната.

Решение

В качестве обобщенных координат данной системы с двумя степенями свободы принимаем перемещение s тележки с момента соприкосновения с упором и угол φ отклонения каната от вертикали, который в начальный момент равен нулю. Если рассматривать груз как материальную точку, то кинетическая энергия системы будет:

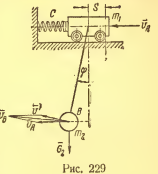


Рис. 229

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2},$$

где скорость тележки v_A равна $\dot{s}$, а скорость $\bar{v}_B$ груза — геометрическая сумма переносной скорости, равной v_A, и относительной скорости (по отношению к тележке) $v' = l \cdot \dot{\varphi}$ и направленной перпендикулярно к AB. Поэтому $v_B^2 = v_A^2 + v'^2 + 2 v_A v' \cos\varphi = \dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{s}l\dot{\varphi}\cos\varphi$ и, следовательно,

$$T = (m_1 + m_2)\frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi).$$

Так как сжатие пружины равно, очевидно s, то потенциальная энергия данной системы будет равна:

$$\Pi = \frac{cs^2}{2} + m_2 gl(1 - \cos\varphi).$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{\varphi}\dot{s} \cdot \sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 (l^2\dot{\varphi} + l\dot{s}\cos\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l(l\ddot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi - \dot{s}\,\dot{\varphi}\sin\varphi), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 gl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2)\dot{s} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2 l\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = cs.$$

Составляя теперь для данной системы два уравнения Лагранжа, получаем:

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi + cs = m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi;$$
$$\ddot{s}\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

Считая, что в данном случае угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угол φ отклонения каната от вертикали при движении остаются неболь-

шими, полученные уравнения можно заменить приближенными уравнениями, полагая $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и пренебрегая членом содержащим $\dot{\varphi}^2$. Тогда получаем следующую систему двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s} + m_2 l\ddot{\varphi} + cs = 0; \\ \ddot{s} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

где $m = m_1 + m_2$.

Частные решения уравнений (а) получаем в виде

$$s = A_1 \sin(kt + \alpha) \quad \text{и} \quad \varphi = A_2 \sin(kt + \alpha).$$

Подставляя эти выражения и их вторые производные в уравнения (а) и сокращая эти уравнения на $\sin(kt + \alpha)$, имеем:

$$(c - mk^2) A_1 - m_2 lk^2 A_2 = 0; \quad -k^2 A_1 + (g - lk^2) A_2 = 0, \text{ или}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{c - mk^2}{m_2 lk^2} = \frac{k^2}{g - lk^2} = \lambda.$$

Отсюда получаем следующее уравнение частот:

$$(c - mk^2)(g - lk^2) - m_2 lk^4 = 0.$$

После упрощений это уравнение принимает вид:

$$k^4 - \frac{mg + cl}{m_1 l} k^2 + \frac{cg}{m_1 l} = 0,$$

или

$$k^4 - pk^2 + q = 0,$$

где

$$p = \frac{mg + cl}{m_1 l} = 40{,}53 \quad \text{и} \quad q = \frac{cg}{m_1 l} = 27{,}4.$$

Решая уравнение частот, находим:

$$k_1^2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{и} \quad k_2^2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

откуда

$$k_1 \approx 0{,}8 \ сек^{-1} \quad \text{и} \quad k_2 \approx 6{,}3 \ сек^{-1}.$$

Таким образом, для отношения амплитуд получаем два значения:

$$\lambda_1 = \frac{c - mk_1^2}{m_2 lk_1^2} = \frac{k_1^2}{g - lk_1^2} = 3{,}865 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{c - mk_2^2}{m_2 lk_2^2} = \frac{k_2^2}{g - lk_2^2} = -0{,}072.$$

Обозначая $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$ амплитуды, соответствующие первой частоте k_1, а $A_2^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$ амплитуды, соответствующие второй частоте k_2, имеем:

$$A_2^{(1)} = \lambda_1 A_1^{(1)} \qquad A_2^{(2)} = \lambda_2 A_1^{(2)}.$$

Итак, получаем две системы частных решений уравнений (а).
Первая система:

$$s^{(1)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) \quad \text{и} \quad \varphi^{(1)} = A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) = \lambda_1 A_1^{(1)} \times \sin(k_1 t + \alpha_1).$$

Вторая система:

$$s^{(2)} = A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) \text{ и } \varphi^{(2)} = A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) = \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

Здесь α_1 и α_2 — начальные фазы, соответствующие частотам k_1 и k_2.

Первая система частных решений соответствует так называемому **первому главному колебанию** рассматриваемой механической системы, вторая система частных решений соответствует **второму главному колебанию**.

В силу линейности исходных дифференциальных уравнений (а), общее решение этих уравнений складывается из частных решений, т. е.

$$\left.\begin{aligned} s &= s^{(1)} + s^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \varphi &= \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (б)$$

В этих уравнениях $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 и α_2 являются произвольными постоянными, которые определяются по начальным условиям.

Дифференцируя уравнение (б) по времени t, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{s} &= A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2); \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1 A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (в)$$

В рассматриваемом примере при $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{s}_0 = v_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$.

Подставляя эти значения в уравнения (б) и (в), имеем:

$$0 = A_1^{(1)} \cdot \sin\alpha_1 + \lambda_1 A_1^{(2)} \sin\alpha_2; \quad 0 = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin\alpha_1 + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin\alpha_2;$$
$$v_0 = A_1^{(1)} k_1 \cos\alpha_1 + A_1^{(2)} k_2 \cos\alpha_2; \quad 0 = A_1^{(1)} \lambda_1 k_1 \cos\alpha_1 + A_1^{(2)} \lambda_2 k_2 \cos\alpha_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad A_1^{(1)} = \frac{v_0 \lambda_2}{k_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{v_0}{k_1 (k_2^2 - k_1^2)} \left(k_2^{(2)} - \frac{c}{m_1} \right) = 0{,}02;$$

$$A_1^{(2)} = -\frac{v_0 \lambda_1}{k_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = -\frac{v_0}{k_2 (k_2^2 - k_1^2)} \left(k_1^2 - \frac{c}{m_1} \right) = 0{,}156.$$

Таким образом,

$$s = 0{,}02 \sin 0{,}8t + 0{,}156 \sin 6{,}3t;$$
$$\varphi = 0{,}08 \sin 0{,}8t - 0{,}111 \sin 6{,}3t.$$

Рассмотрим затем второй способ решения полученной системы (а) двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s}+m_2 l\ddot{\varphi}+cs=0,\\ \ddot{s}+l\ddot{\varphi}+g\varphi=0. \end{aligned}\right\}$$

Путем последовательного дифференцирования каждого из уравнений этой системы, находим:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^3s}{dt^3}+m_2 l\frac{d^3\varphi}{dt^3}+c\frac{ds}{dt}=0;\\ \frac{d^3s}{dt^3}+l\frac{d^3\varphi}{dt^3}+g\frac{d\varphi}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^4s}{dt^4}+m_2 l\frac{d^4\varphi}{dt^4}+c\frac{d^2s}{dt^2}=0;\\ \frac{d^4s}{dt^4}+l\frac{d^4\varphi}{dt^4}+g\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (д)$$

Исключая сначала из этих уравнений обобщенную координату φ и ее производные, а затем координату s и ее производные, получаем два независимых друг от друга линейных дифференциальных уравнения четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^4s}{dt^4}+\frac{mg+cl}{m_1 l}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{cg}{m_1 l}s=0,\\ \frac{d^4\varphi}{dt^4}+\frac{mg+cl}{m_1 l}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{cg}{m_1 l}\varphi=0, \end{aligned}\right\}$$

или, введя опять обозначения $\frac{mg+cl}{m_1 l}=p, \quad \frac{cg}{m_1 l}=q,$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^4s}{dt^4}+p\frac{d^2s}{dt^2}+qs=0,\\ \frac{d^4\varphi}{dt^4}+p\frac{d^2\varphi}{dt^2}+q\varphi=0. \end{aligned}\right\} \qquad (е)$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее каждому из уравнений этой системы, $u^4+pu^2+q=0$.

Корни этого уравнения будут:

$$u_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}=\pm ik_1;$$

$$u_{3,4}=\pm\sqrt{-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}=\pm ik_2.$$

Следовательно, решение уравнений (е) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} s=C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t+C_3\cos k_2t+C_4\sin k_2t;\\ \varphi=C_1'\cos k_1t+C_2'\sin k_1t+C_3'\cos k_2t+C_4'\sin k_2t, \end{aligned}\right\} \qquad (ж)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_1', C_2', C_3', C_4' — произвольные постоянные. Перейдем к определению этих постоянных, для чего воспользуемся начальными условиями движения. Полагая в уравнениях

(а) и (г) $t_0=0$ и учитывая, что по условиям задачи $s_0=\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}_0=0$, $\dot{s}_0=v_0$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s}_0+m_2l\ddot{\varphi}_0=0,\\ \ddot{s}_0+l\ddot{\varphi}_0=0,\end{aligned}\right\} \qquad (а')$$

$$\left.\begin{aligned} m\dddot{s}_0+m_2l\dddot{\varphi}_0+cv_0=0,\\ \dddot{s}_0+l\dddot{\varphi}_0=0.\end{aligned}\right\} \qquad (г')$$

Решая каждую из этих систем в отдельности, получим:

$$\ddot{s}_0=\ddot{\varphi}_0=0, \quad \dddot{s}_0=-\frac{cv_0}{m_1}, \quad \dddot{\varphi}_0=\frac{cv_0}{lm_1}.$$

Теперь определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого вычислим производные $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}&=-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t-C_3k_2\sin k_2t+C_4k_2\cos k_2t,\\ \ddot{s}&=-C_1k_1^2\cos k_1t-C_2k_1^2\sin k_1t-C_3k_2^2\cos k_2t-C_4k_2^2\sin k_2t,\\ \dddot{s}&=C_1k_1^3\sin k_1t-C_2k_1^3\cos k_1t+C_3k_2^3\sin k_2t-C_4k_2^3\cos k_2t.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Полагая в этих равенствах и в первом из уравнений (ж) $t=0$, получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots C_4$:

$$\left.\begin{aligned} s_0&=C_1+C_3=0,\\ \dot{s}_0&=C_2k_1+C_4k_2=v_0,\\ \ddot{s}_0&=-C_1k_1^2-C_3k_2^2=0,\\ \dddot{s}_0&=-C_2k_1^3-C_4k_2^3=-\frac{cv_0}{m_1}.\end{aligned}\right\}$$

Решая совместно первое и третье уравнения, находим $C_1=C_3=0$.

Из второго и четвертого уравнений имеем:

$$C_2=\frac{v_0-C_4k_2}{k_1} \text{ и } C_4(k_2^3-k_2k_1^2)=v_0\left(\frac{c}{m_1}-k_1^2\right),$$

откуда

$$C_4=\frac{v_0}{k_2(k_2^2-k_1^2)}\left(\frac{c}{m_1}-k_1^2\right),$$

$$C_2=\frac{-v_0}{k_1(k_2^2-k_1^2)}\left(\frac{c}{m_1}-k_2^2\right).$$

Таким образом,

$$s=\frac{v_0}{k_2^2-k_1^2}\left\{\frac{1}{k_2}\left(\frac{c}{m}-k_1^2\right)\sin k_2t-\frac{1}{k_1}\left(\frac{c}{m}-k_2^2\right)\sin k_1t\right\}.$$

Аналогично, для определения постоянных C_1', C_2', C_3', C_4' получим следующую систему четырех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' + C_3' = 0, \\ &C_2' k_1 + C_4' k_2 = 0, \\ &-C_1' k_1^2 - C_3' k_2^2 = 0, \\ &-C_2' k_1^3 - C_4' k_2^3 = \frac{cv_0}{lm_1}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим: $C_1' = C_3' = 0$, $C_2' = \frac{cv_0}{lm_1(k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_1}$, $C_4' = -\frac{cv_0}{lm_1(k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_2}$, и, следовательно,

$$\varphi = \frac{cv_0}{lm_1(k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \frac{1}{k_1} \sin k_1 t - \frac{1}{k_2} \sin k_2 t \right\}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I

СТАТИКА

Раздел II

КИНЕМАТИКА

Раздел III

ДИНАМИКА

Динамика точки

Динамика системы

Туся Бенциановна Айзенберг,
Иван Михайлович Воронков,
Всеволод Михайлович Осецкий

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Редактор издательства
З. Г. Овсянникова

Технический редактор
С. С. Горохова

Сдано в набор 18/III—60 г.
Подписано к печати 23/VII—60 г.
Бумага $60\times92^{1}/_{16}$-24,5 печ. л. уч.-изд. л.
Заказ № 335. Тираж 47 500 Цена 7 р. 70 к.
Новая цена с 1 января 1961 года 77 коп.

Государственное издательство
«Высшая школа»
Москва, Б-62, Подсосенский п., 20.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского совнархоза
Москва, Ж-54, Валовая, 28.





7 р. 70 к.
С 1/I-61 г. — 77 коп.